

Matematyka w sztuce gotyku

czerwiec 2022



Uczniowie klas: VIII A, VIII B, VIII D i VIII K

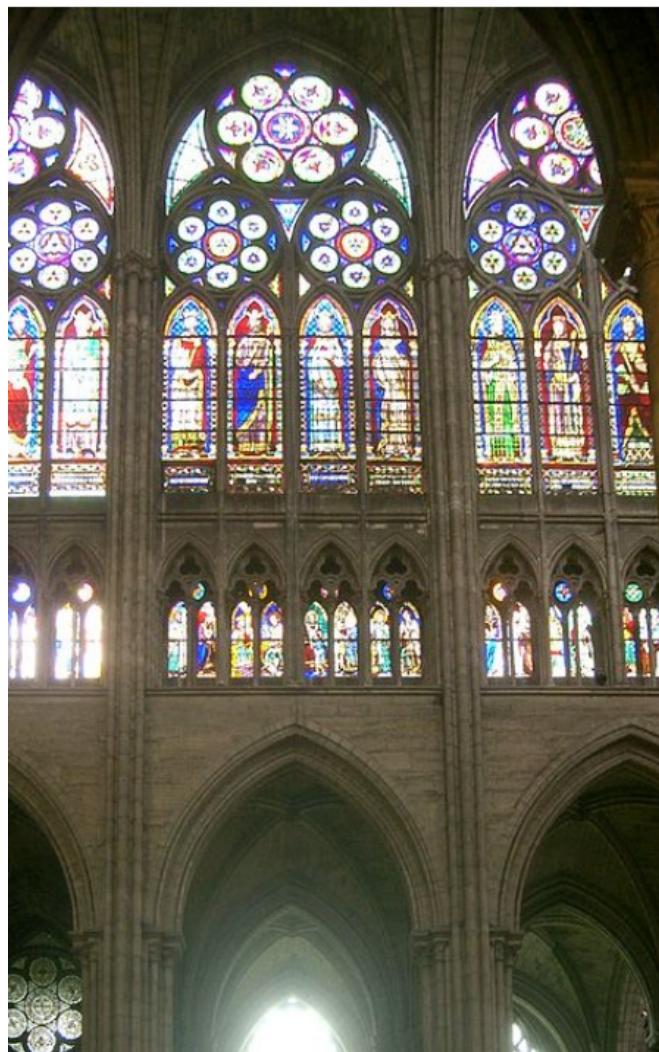
Szkoła Przymierza Rodzin im. Jana Pawła II



Grupy:

1. Weronika Sioda i Tomek Plit
2. Kasia Kuszner i Zuzia Adamowicz
3. Misia Kuczmierczyk, Tosia Dałek i Michał Kruss
4. Bruno Pociecha i Janek Ciborowski
5. Paulina Myśliwiec i Natalia Jończyk
6. Artur Przybylik i Piotrek Wojtkowski
7. Adam Szczeciński, Adam Wnuk i Kuba Biekionis
8. Basia Marciniak i Nina Parnas
9. Michał Smółko, Mateusz Jemielity i Maciek Kupis

Nauczyciel: Joanna Lisak



Matematyka w sztuce gotyku

Okno z Pizy

Projekt zrobiony przez Weronikę Siodę i Tomasza Plita

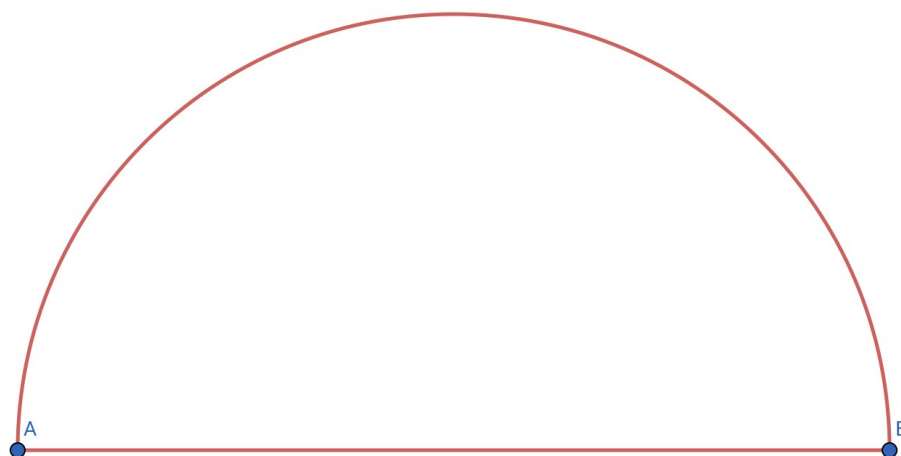


Piza to miasto we Włoszech, w Toskanii. Przyciąga wielu turystów, ponieważ ma wiele niesamowitych zabytków w stylu pizańskim. Nasze okno pochodzi z największej Katedry w tym mieście.

Katedra w Pizie wraz z baptysterium, kampanilą oraz cmentarzem Camposanto Monumentale tworzy zespół zabytkowy Piazza del Duomo, wpisany w 1987 roku na listę światowego dziedzictwa UNESCO. Katedra łączy w sobie elementy stylistyczne architektury lombardzko-emilijskiej, klasycznej, późnostarożytnej, bizantyńskiej, rawenneńskiej i arabskiej.

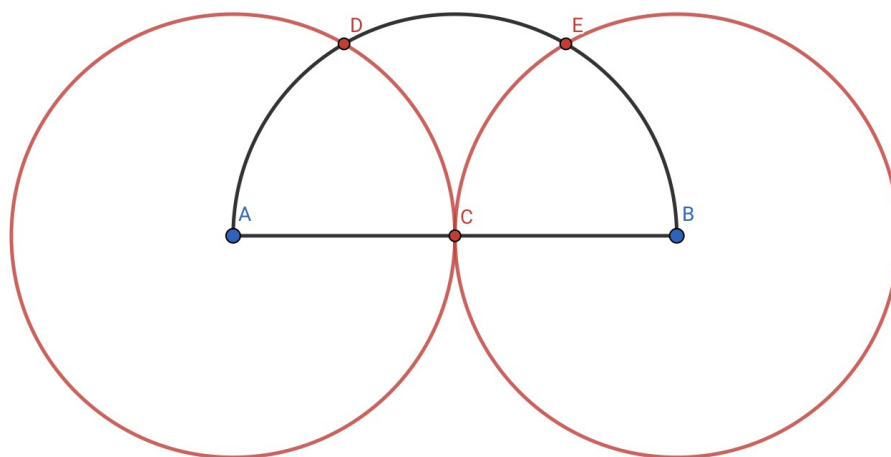
Rozpoczęta w 1064 roku i ukończona w połowie XII wieku, została zbudowana dzięki bogatym łupom, zdobywanym w bitwach morskich w rejonie Morza Śródziemnego oraz darowiznom, zarówno prywatnym jak i cesarskim, stając się symbolem morskiej potęgi Republiki Pizy w szczytowym okresie jej rozwoju.

Krok 1



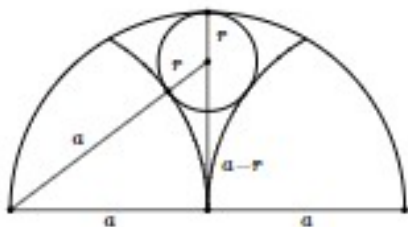
1. Rysujemy półokrąg o średnicy AB.

Krok 2



1. Punkt C to środek odcinka AB.
2. Rysujemy okrąg o środku A i promieniu AC.
3. Rysujemy okrąg o środku B i promieniu BC.
4. W punkcie przecięcia okręgu o środku A i półokręgu o środku C zaznaczamy punkt D.
5. W punkcie przecięcia okręgu o środku B i półokręgu o środku C zaznaczamy punkt E.

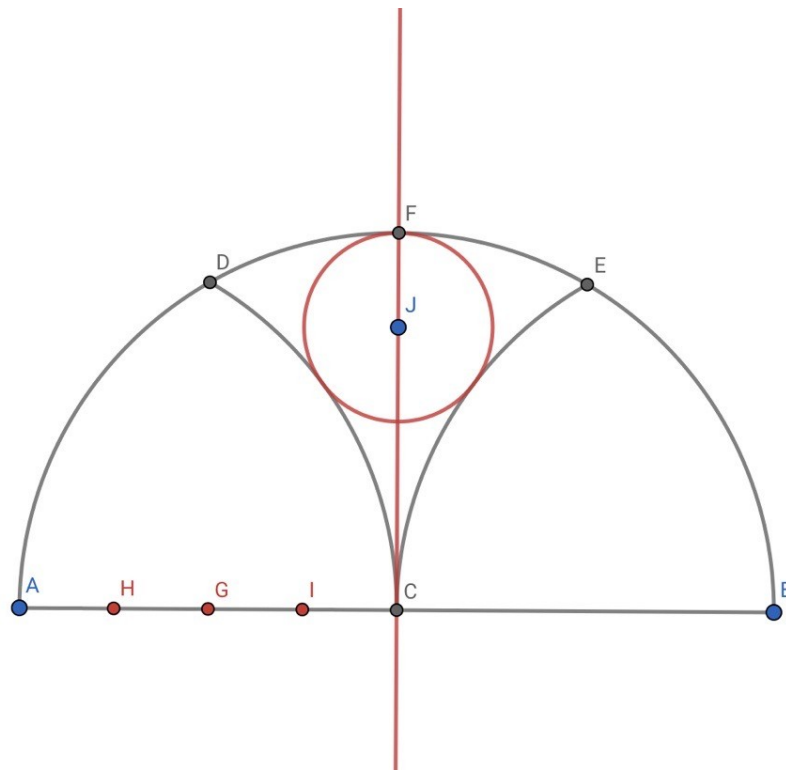
Krok 3



$$\begin{aligned}
 a^2 + (a-r)^2 &= (a+r)^2, \\
 a^2 + a^2 - 2ar + r^2 &= a^2 + 2ar + r^2, \\
 4ar &= a^2, \\
 r &= \frac{1}{4} \cdot a.
 \end{aligned}$$

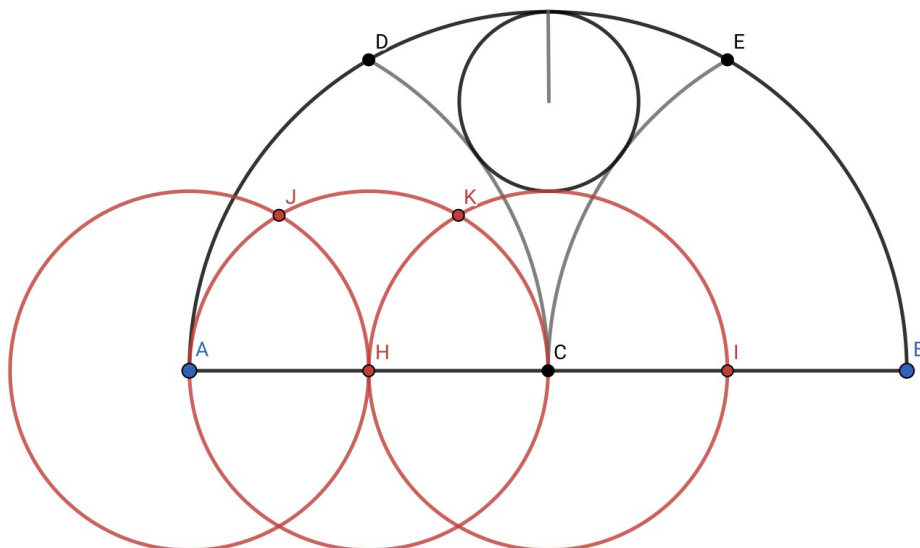
1. Chcemy obliczyć długość promienia okręgu wpisanego w taką figurę.
2. Nazywamy promień naszego półokręgu jako a .
3. Nazywamy promień naszego wpisanego okręgu jako r .
4. Zatem odległość od środka okręgu wpisanego do środka półokręgu wynosi $a-r$.
5. Z kolei odległość od środka okręgu wpisanego do miejsca przecięcia półokręgu ze średnicą wynosi $a+r$.
6. Z twierdzenia Pitagorasa jesteśmy w stanie wyznaczyć r za pomocą a .
7. Te obliczenia wykorzystujemy do wpisania okręgu w naszą konstrukcję. W następnym kroku.

Krok 4



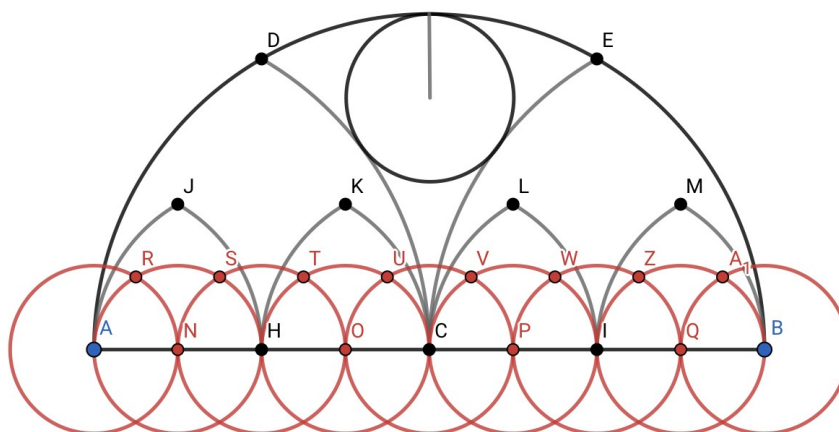
1. Prowadzimy prostą przechodzącą przez punkt C, prostopadłą do AB.
2. W miejscu przecięcia prostej z półokręgiem stawiamy punkt F.
3. Dzielimy odcinek AC na cztery równe części, przez podzielenie odcinku najpierw na dwie równe części, a potem podzielenie otrzymane odcinki jeszcze raz na pół.
4. Z poprzedniego kroku wiemy że okrąg, który możemy wpisać w naszą konstrukcję będzie miał promień długości równej $0.25a$, czyli równy długości przykładowo odcinka HG.
5. Stawiamy punkt J na prostej CF w odległości HG od punktu F. Jest to promień naszego okręgu.
6. Wpisujemy taki okrąg w naszą konstrukcję.

Krok 5



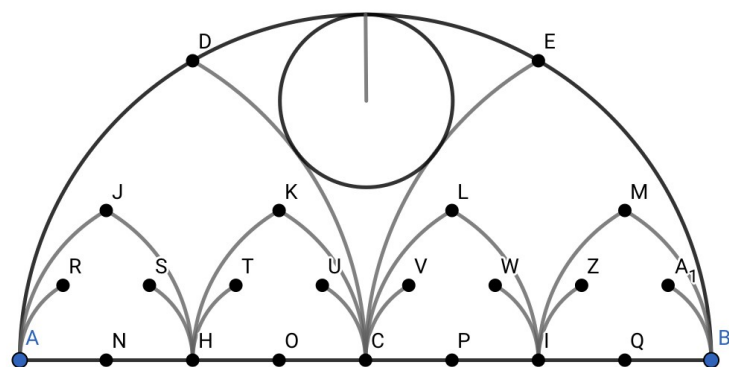
1. Zaznaczamy punkt H, który jest środkiem odcinka AC.
2. Rysujemy okrąg o środku w punkcie A i promieniu AH.
3. Rysujemy także okręgi o środkach C, H i promieniach CH.
4. W punktach przecięcia okręgów zaznaczamy punkty J i K.
5. Następnie ten krok powtarzamy dla ostrołuku BCE.

Krok 6



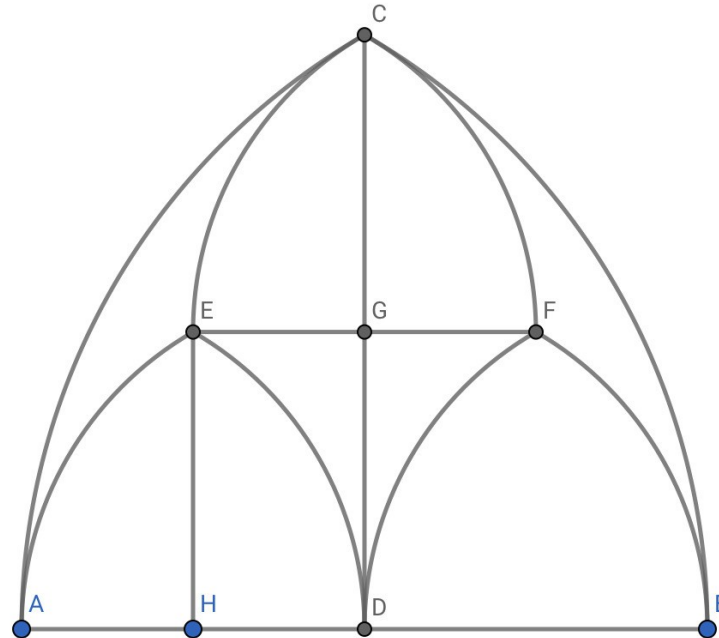
1. Powtarzamy krok poprzedni dla ostrołuków AHJ, HCK, CIL, IBM.

Krok 7



1. Usuwamy wszystkie niepotrzebne linie.

Krok 8



Teza $AE=EC$

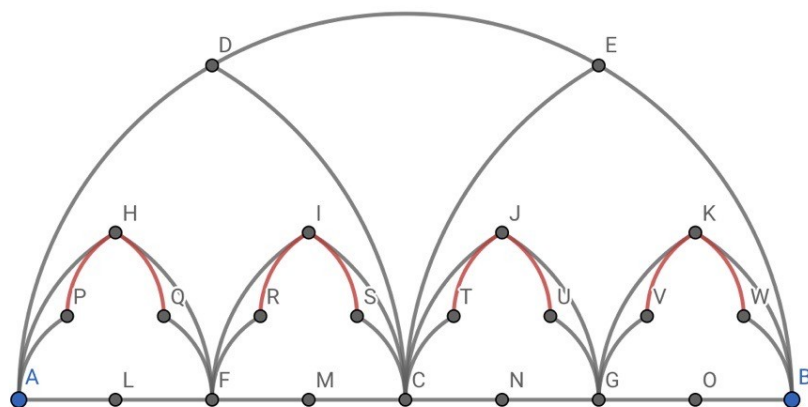
$AD=a$ $CD=h$ $CG=h$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1 = AD = AE$$

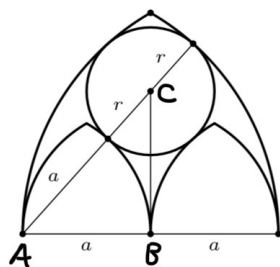
1. Chcemy udowodnić, że promień AE okręgu o środku A, promień FB okręgu o środku B i promień EC okręgu o środku E są równe. Oraz że odcinek EA jest równy EC (promieniowi okręgu o środku E).
2. Powyższe obliczenia tego dowodzą.
3. Zatem okrąg o promieniu EF i środku w E oraz okrąg o promieniu FE i środku w F przetną się w punkcie C.

Krok 9



1. Obliczeń z poprzedniego kroku, używamy, aby narysować łuki w naszej konstrukcji.

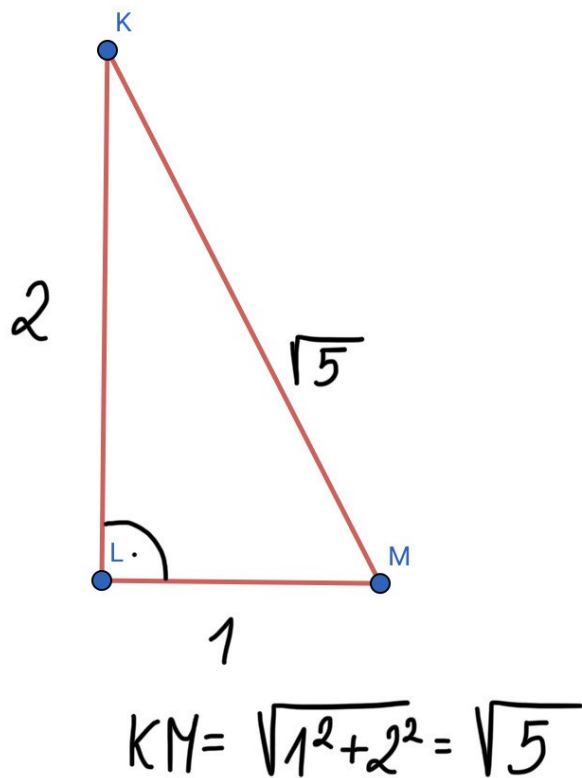
Krok 10



$$r = \frac{1}{2}a$$

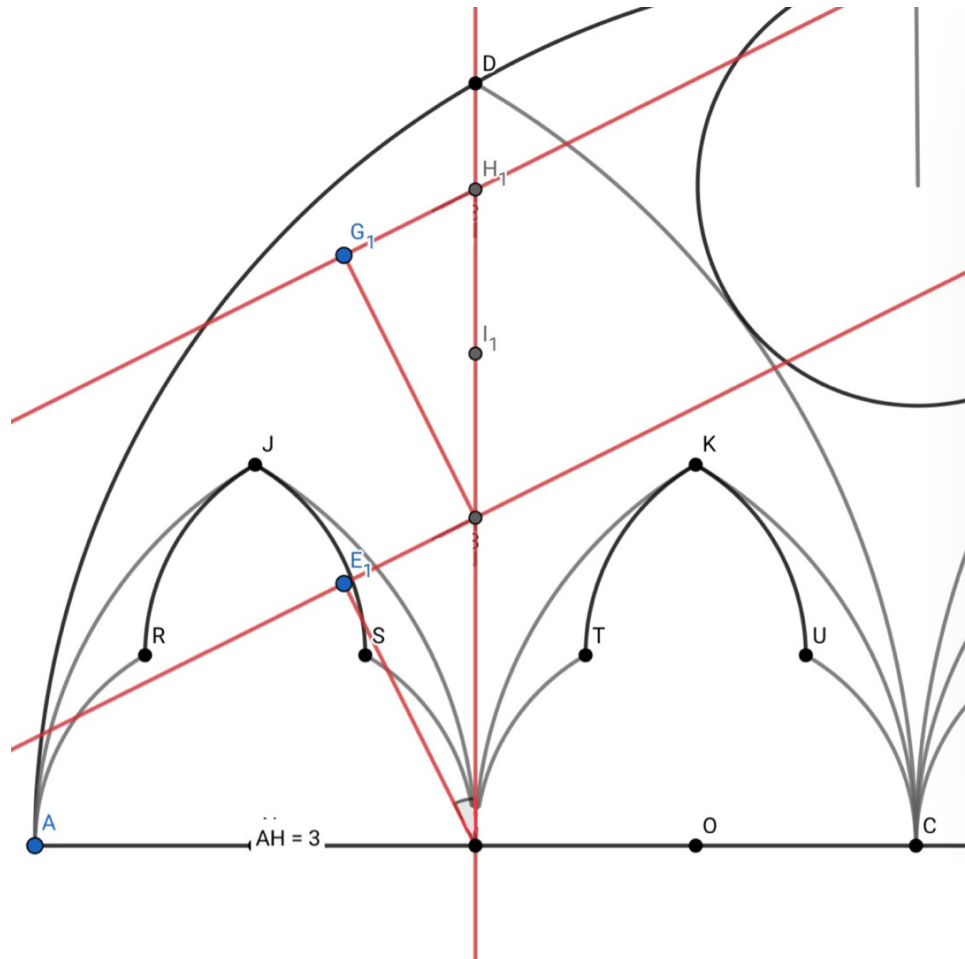
$$CB = \sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^2 - a^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2 - a^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

1. Chcemy obliczyć, gdzie będzie środek okręgu wpisanego.
2. Aby to obliczyć używamy tw. Pitagorasa.

Krok 11

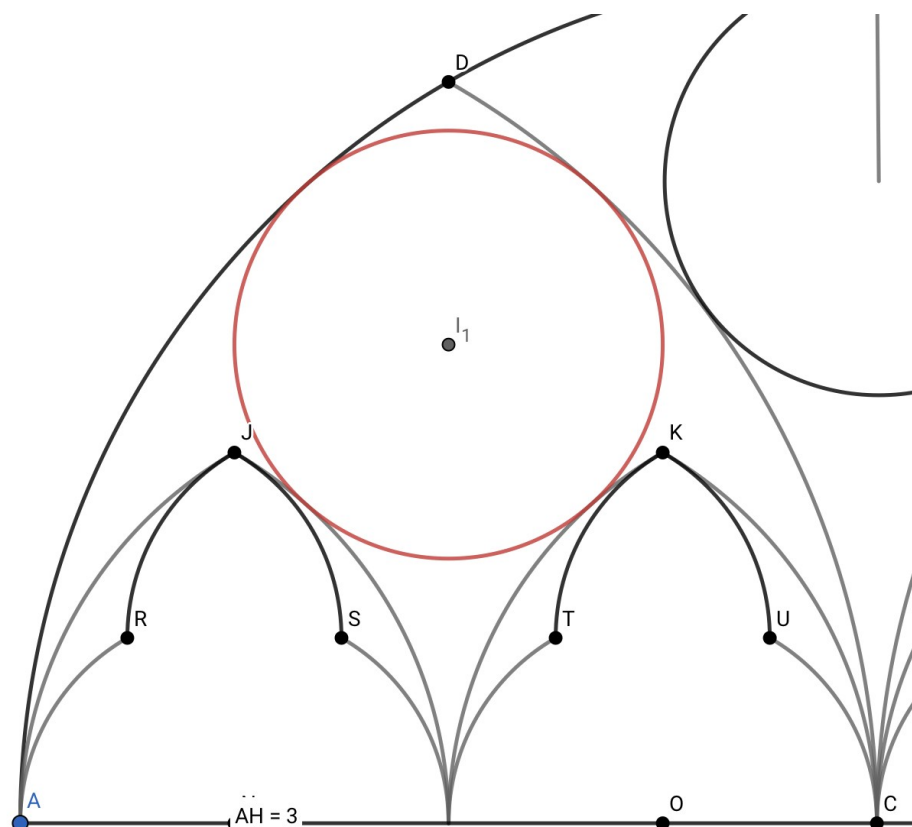
1. Chcemy skonstruować odcinek o długości $\sqrt{5}$.
2. Używamy tw. Pitagorasa. $\sqrt{5}$ to długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 1 i 2.

Krok 12

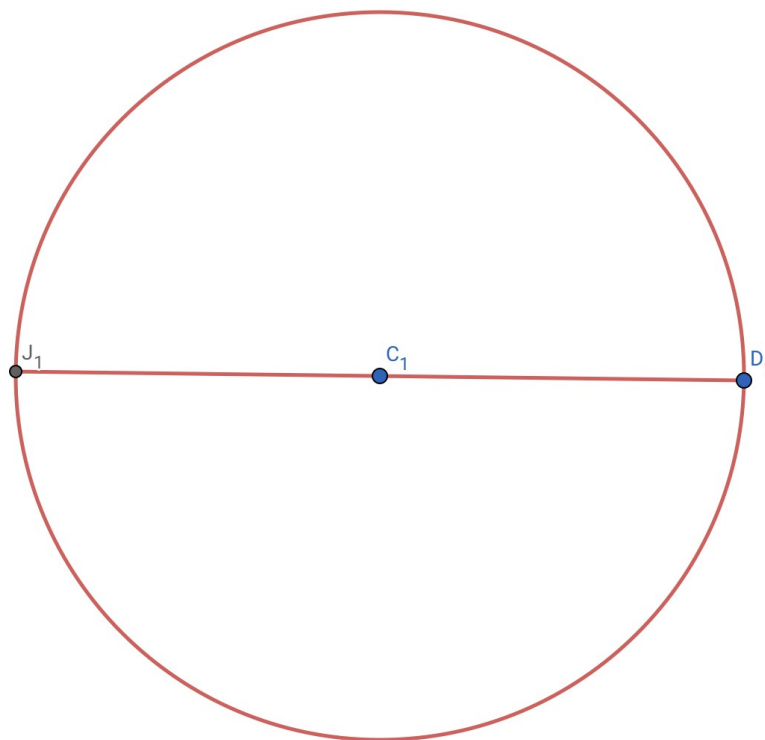


1. Skoro nasze $a=3$, to ze wzoru wyprowadzonego w 10 kroku, odległość środka okręgu od podstawy okna, powinna wynosić $\frac{\sqrt{5}}{2} \times 3 = 1.5\sqrt{5}$.
2. Korzystając z trójkątów prostokątnych o przyprostokątnych 1 i 2, znajdujemy ten punkt na prostej prostopadłej do odcinka AC, stawiamy w tym miejscu punkt I_1 .

Krok 13

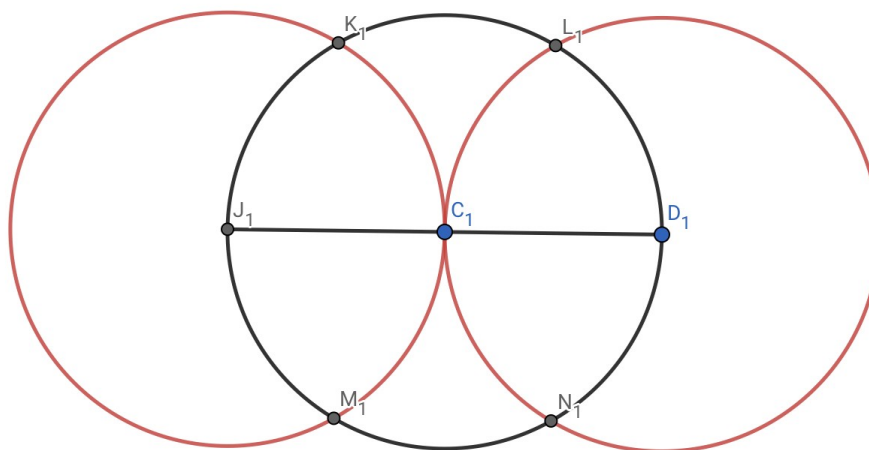


1. Wpisujemy okrąg o środku w punkcie I_1 i o promieniu równym 0.5 (udowodniliśmy to w kroku 10). Skoro nasze $a=3$ to promień musi mieć 1.5.

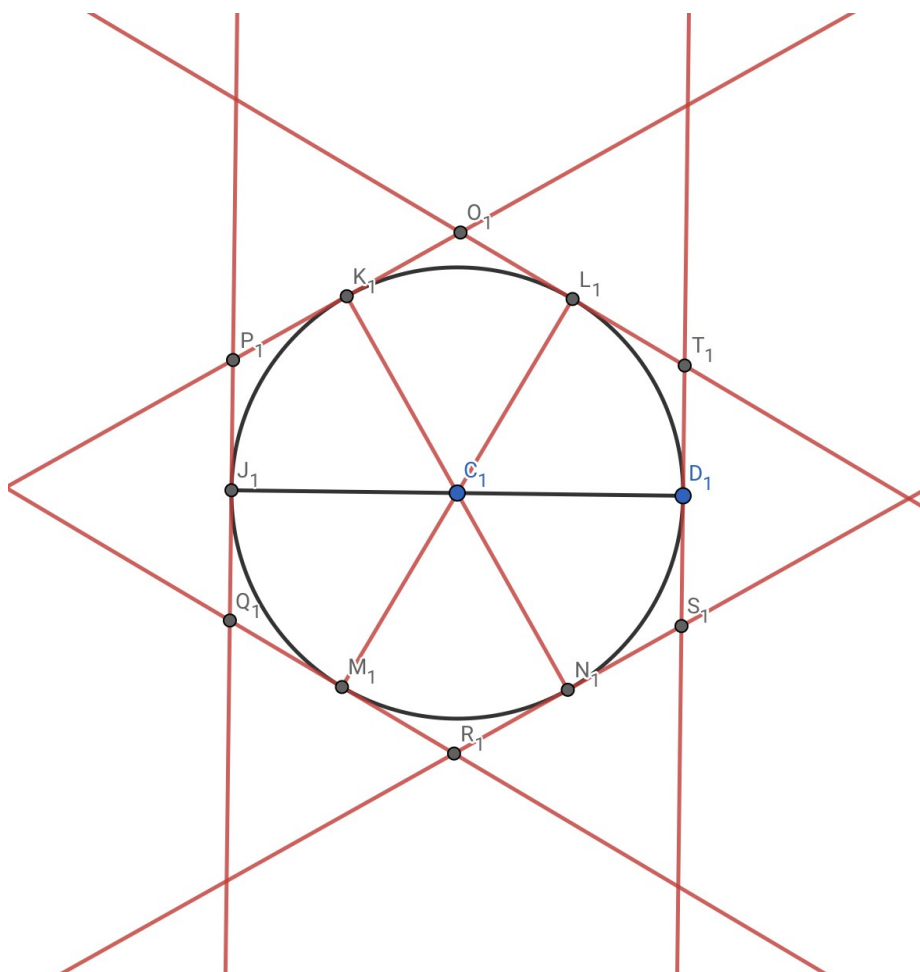
Krok 14.1 (konstrukcja sześcioliścia)

1. Rysujemy okrąg o środku C_1 i promieniu C_1D_1 .

Krok 14.2 (konstrukcja sześcioliścia)

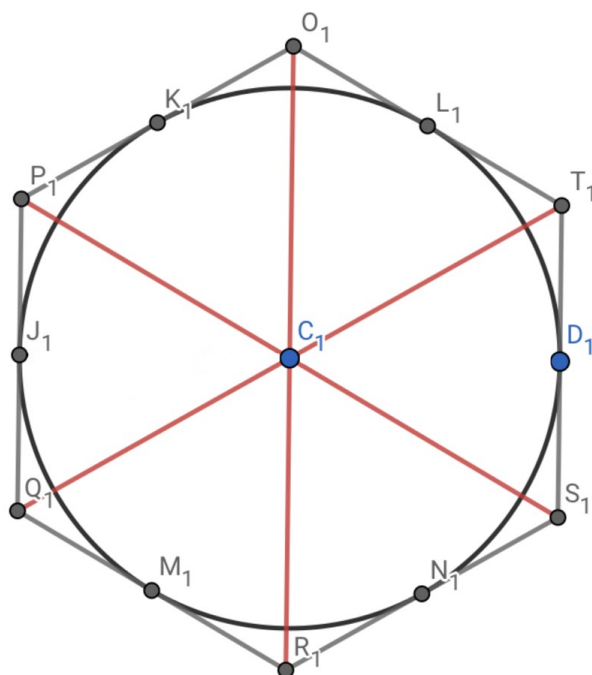


1. Wstawiamy okrąg o środku J_1 i promieniu J_1C_1 oraz okrąg o środku D_1 i promieniu D_1C_1 .
2. W miejscach przecięcia okręgów stawiamy punkty.
3. Ponieważ te trzy okręgi mają równe promienie, odcinki które są promieniami są równe. Dlatego jak połączymy punkty na czarnym okręgu otrzymamy sześciokąt foremny.

Krok 14.3 (konstrukcja sześcioliścia)

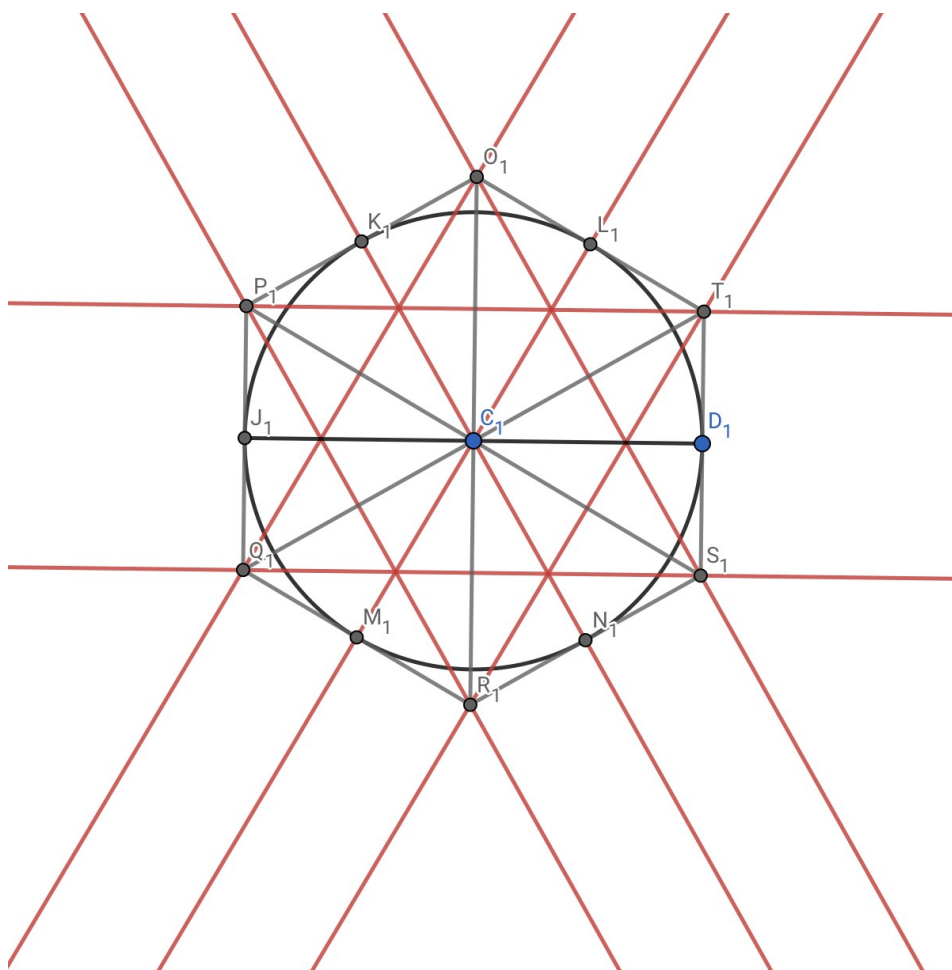
1. Łączymy naprzeciwległe punkty. K_1 z N_1 , D_1 z J_1 , L_1 z M_1 . Są to średnice okręgu.
2. Rysujemy styczne do okręgu w punktach K_1 , N_1 , D_1 , J_1 , L_1 i M_1 .
3. Na przecięciu stycznych stycznych zaznaczamy punkty.

Krok 14.4 (konstrukcja sześcioliścia)



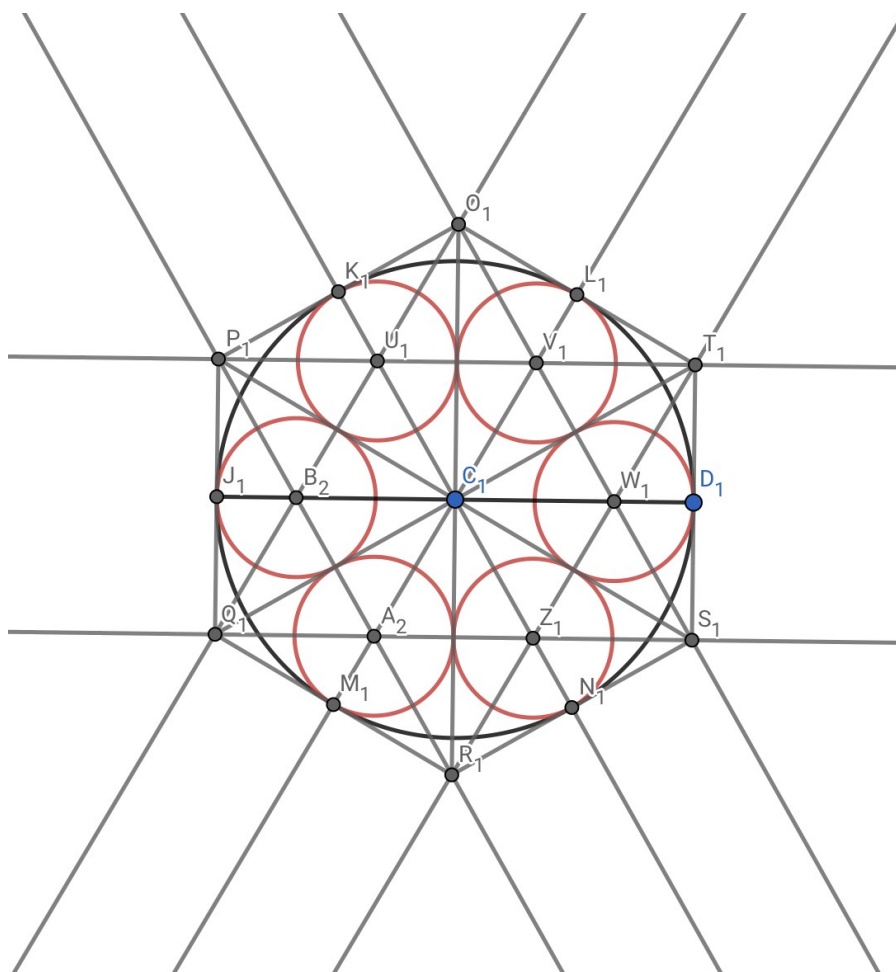
1. Chowamy niepotrzebne linie.
2. Otrzymujemy sześciokąt foremny opisany na okręgu, który jest podzielony na sześć trójkątów równobocznych.

Krok 14.5 (konstrukcja sześcioliścia)

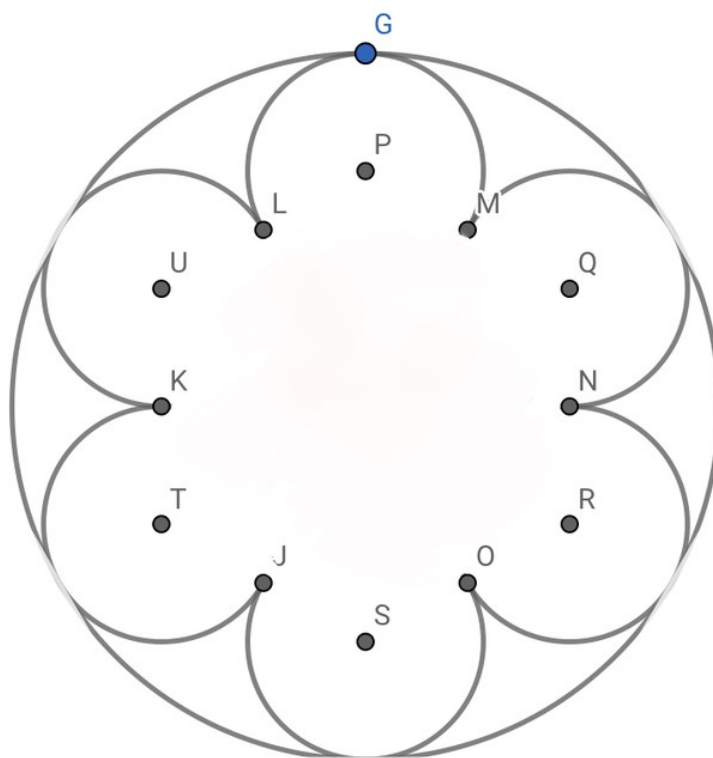


1. W każdym trójkącie równobocznym prowadzimy symetralne wszystkich boków.

Krok 14.6 (konstrukcja sześcioliścia)

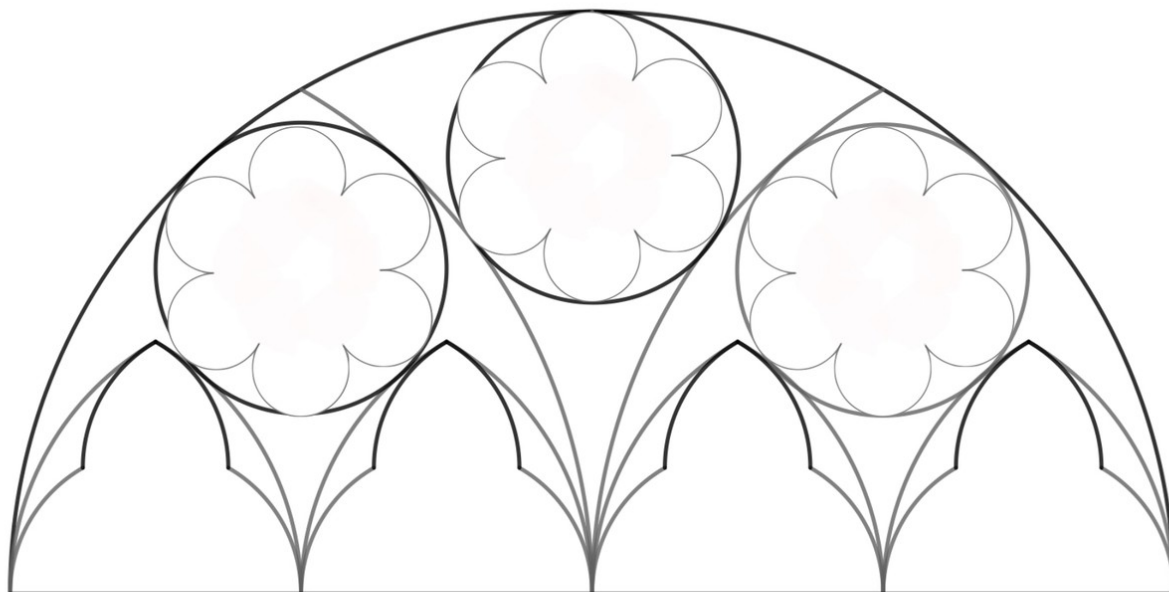


1. Punkty przecięcia symetralnych to środki okręgów.
2. W każdy trójkąt równoboczny wpisujemy okrąg, o środku w punkcie przecięcia symetralnych i promieniu stycznym do dużego okręgu (równym odległości środka od punktu styczności).

Krok 14.7

1. Usuwamy zbędne linie.

Krok 15



1. Sześcioliście wpisujemy w odpowiednie okręgi.
2. Otrzymujemy efekt końcowy.

Matematyka w sztuce gotyku

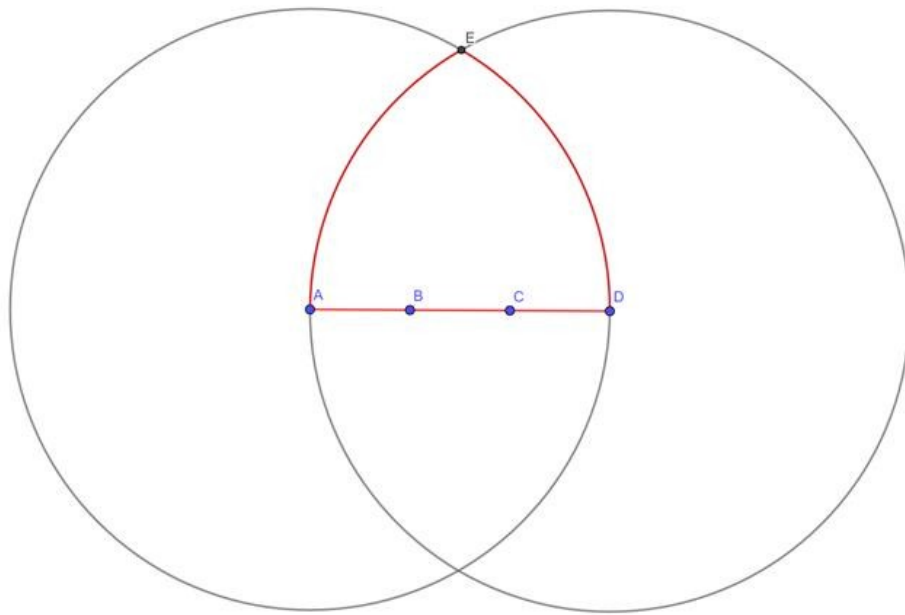


Skład grupy nr 2: Zuzanna Adamowicz, Katarzyna Kuszner 8K

O naszym oknie

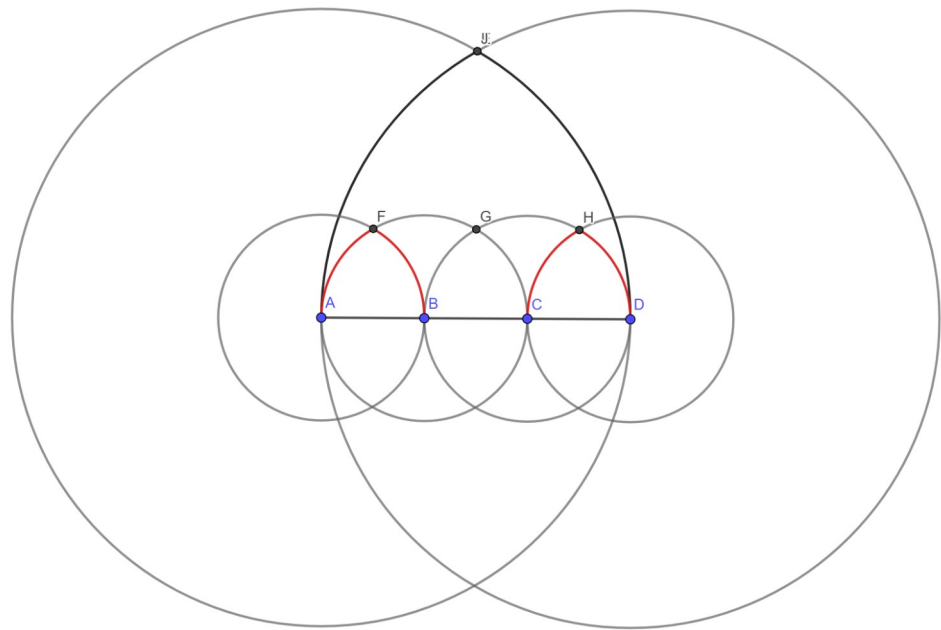
Pochodzi ono z Bazyliki Mariackiej Wniebowzięcia Najświętszej Maryi Panny, znajdującej się na Starym Mieście w Gdańsku. Bazylikę zbudowano w drugiej połowie XIV wieku w stylu gotyckim. Okno znajduje się od strony północnej, od ulicy Podkramarskiej.



Krok 1.

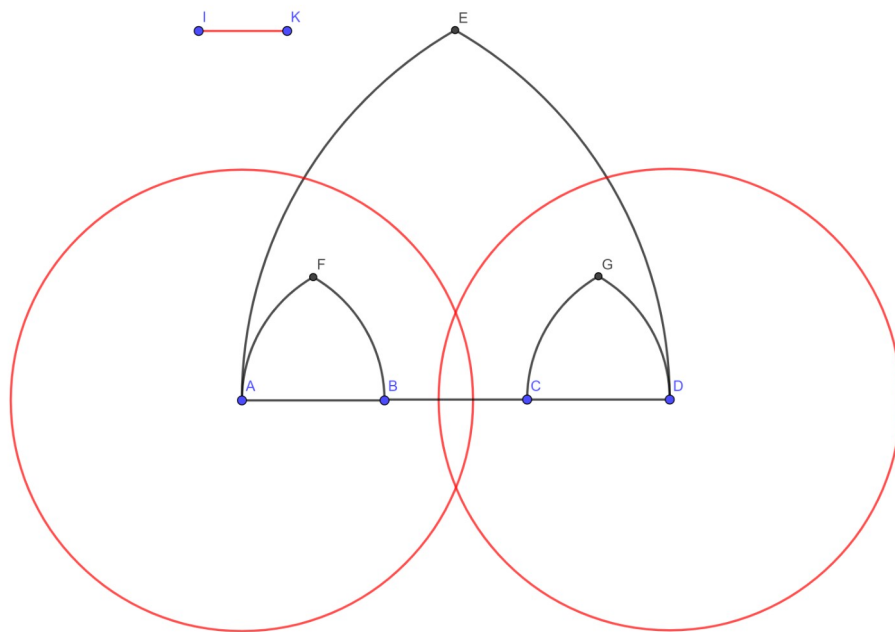
Rysujemy odcinek AB. Przedłużamy ten odcinek dwa razy o długość AB.

Następnie rysujemy okrąg o środku A i promieniu AD oraz okrąg o środku D i promieniu AD.

Krok 2.

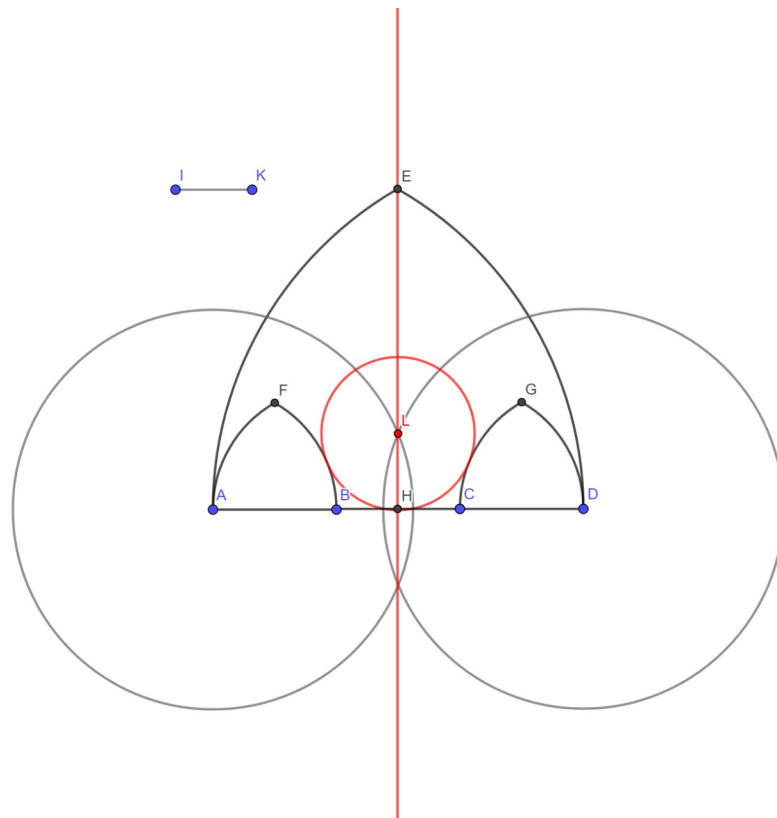
Rysujemy okrąg o środku A i promieniu AB, okrąg o środku B i promieniu AB.

Następnie rysujemy okrąg o środku D i promieniu CD oraz okrąg o środku C i promieniu CD.

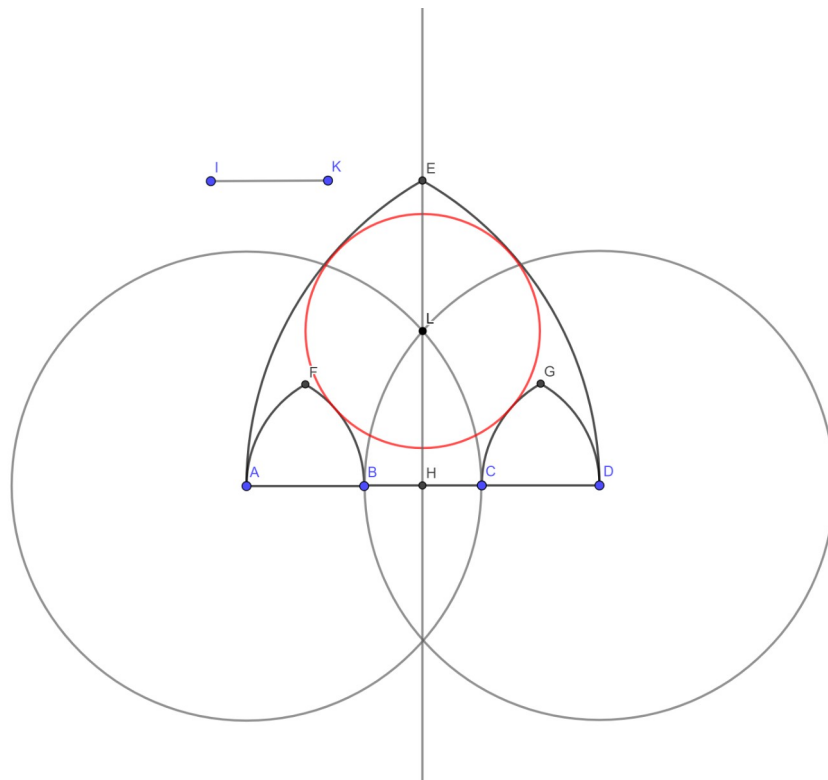
Krok 3.

Rysujemy odcinek IK . Następnie rysujemy okrąg o środku A i promieniu $AB + IK$.

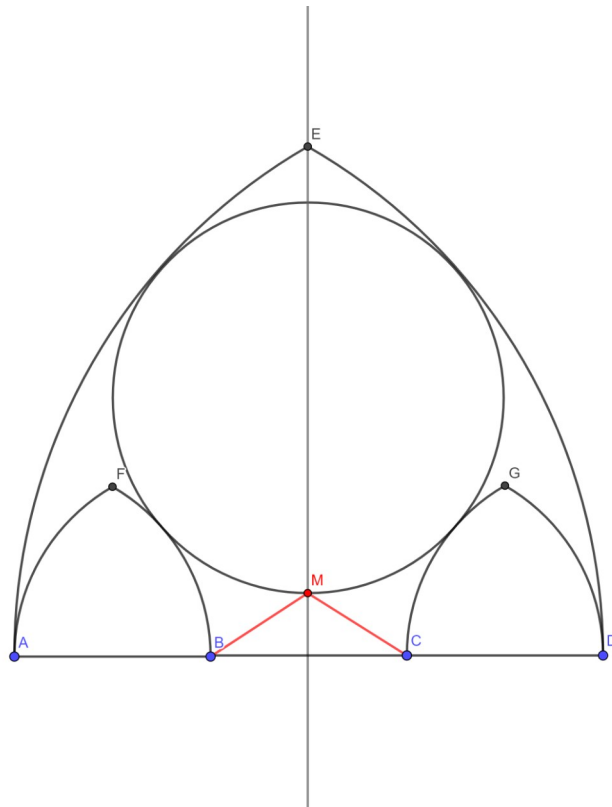
Następnie rysujemy okrąg o środku D i promieniu $CD + IK$.

Krok 4.

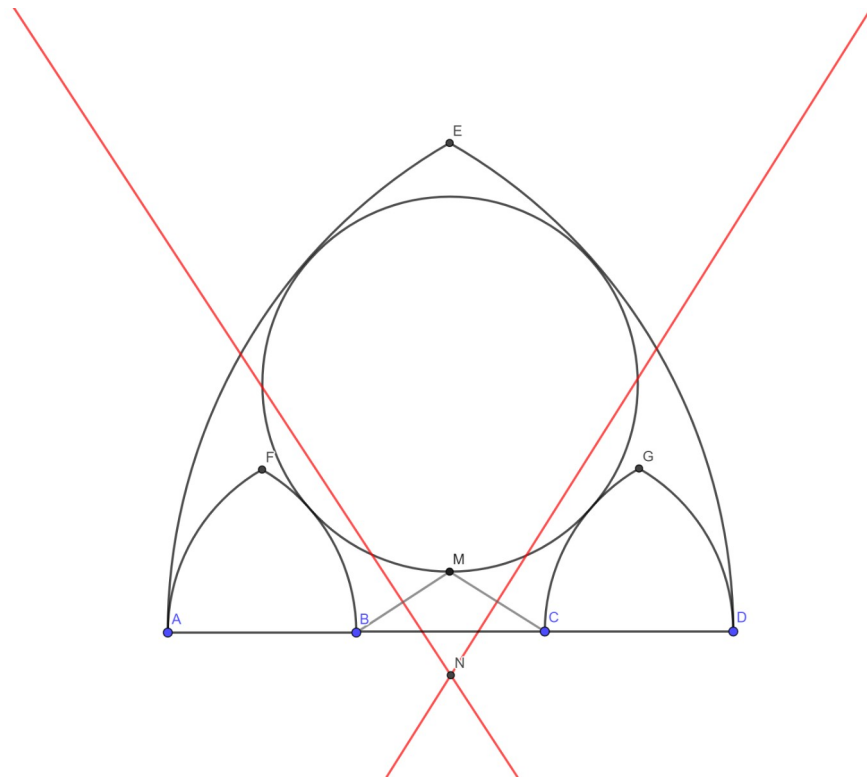
Rysujemy prostą prostopadłą do AB, przechodzącą przez punkt E. Zaznaczamy punkt L na przecięciu nowych okręgów. Będzie on leżał na prostej EH, ponieważ $AB + IK = CD + IK$, więc punkt L znajduje się na prostej dzielącej największy ostrołuk na pół i prostopadłą do AD, a taką prostą jest EH. Rysujemy okrąg o środku L i promieniu IK. Ten okrąg będzie styczny do małych ostrołuków, ponieważ odległość punktu L od łuków BF i CG jest równa IK.

Krok 5.

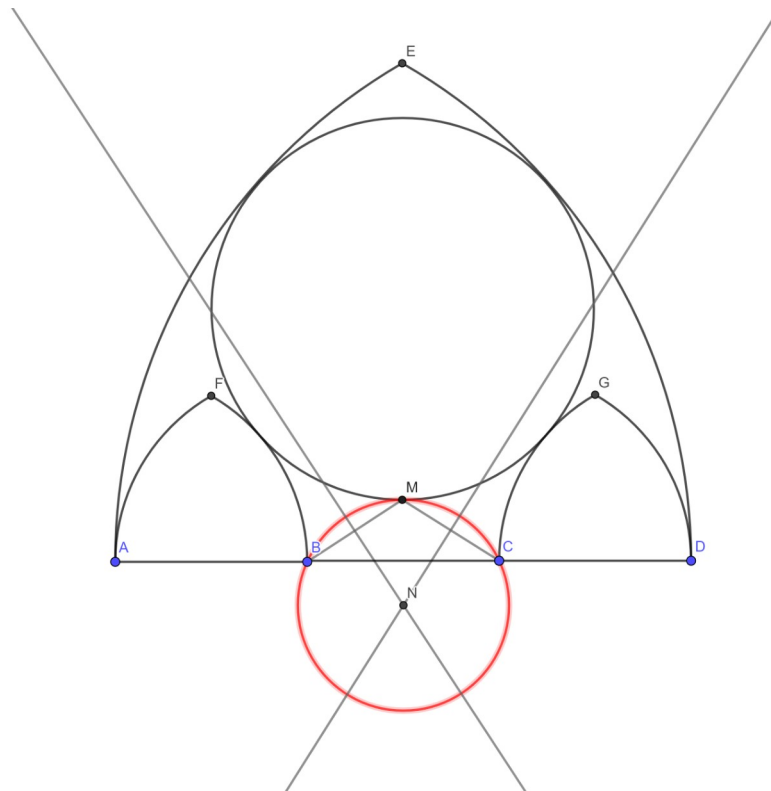
Dostosowujemy długość odcinka IK, żeby okrąg o środku L był styczny do ostrołuku.

Krok 6.

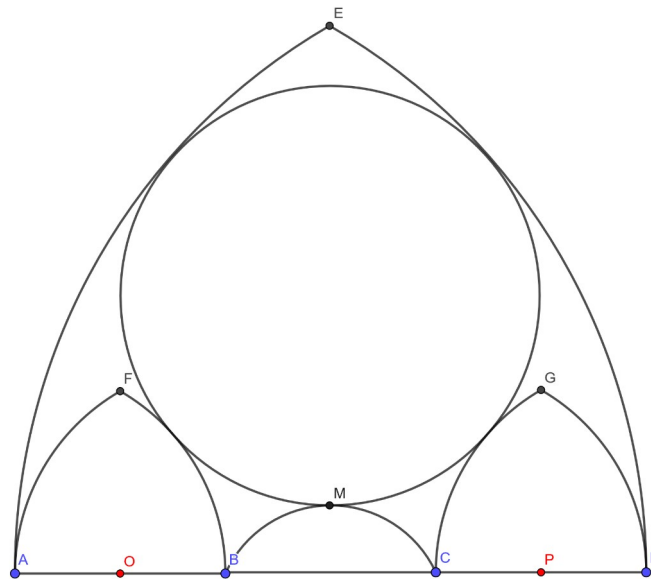
Zaznaczamy punkt M na przecięciu okręgu o środku L z prostą EH. Rysujemy odcinki BM i MC.

Krok 7.

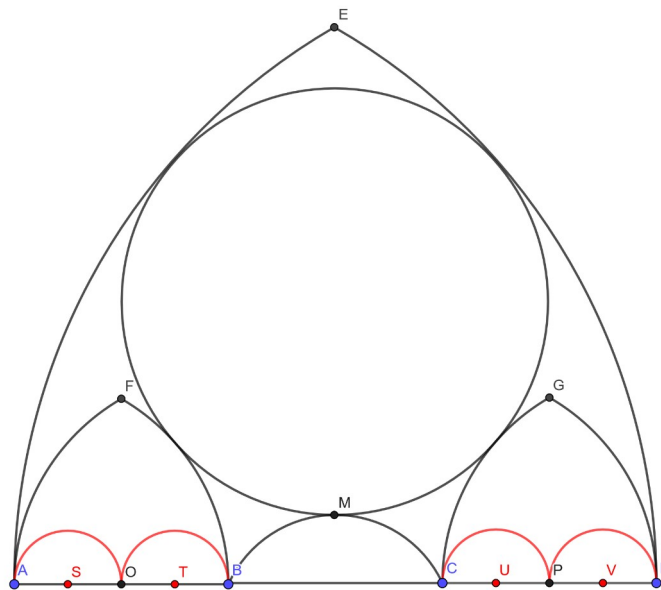
Rysujemy symetralne odcinków BM i MC. W punkcie ich przecięcia zaznaczamy punkt N.

Krok 8.

Rysujemy okrąg o środku N i promieniu MN.

Krok 9.

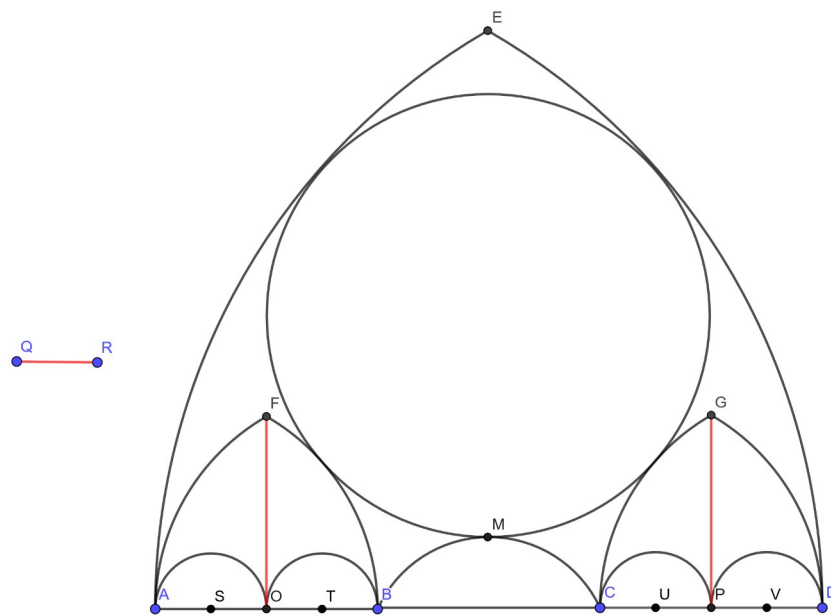
Zaznaczamy punkty O i P - są to środki odcinków AB i CD.

Krok 10.

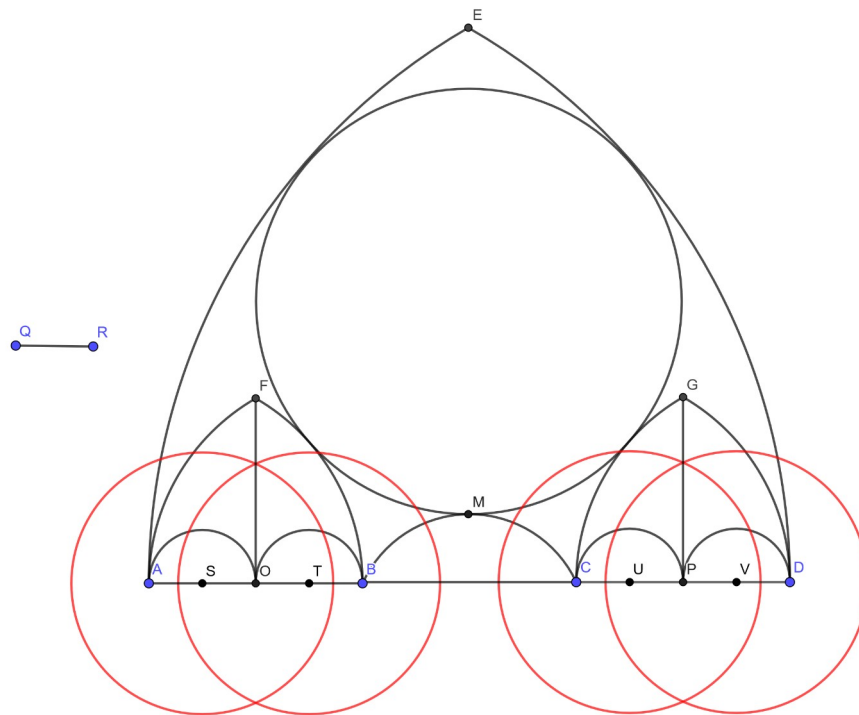
Zaznaczamy punkty S, T, U, V - są to środki odcinków AO, OB, CP i PD.

Rysujemy okrąg o środku S i promieniu AS i okrąg o środku T i promieniu OT.

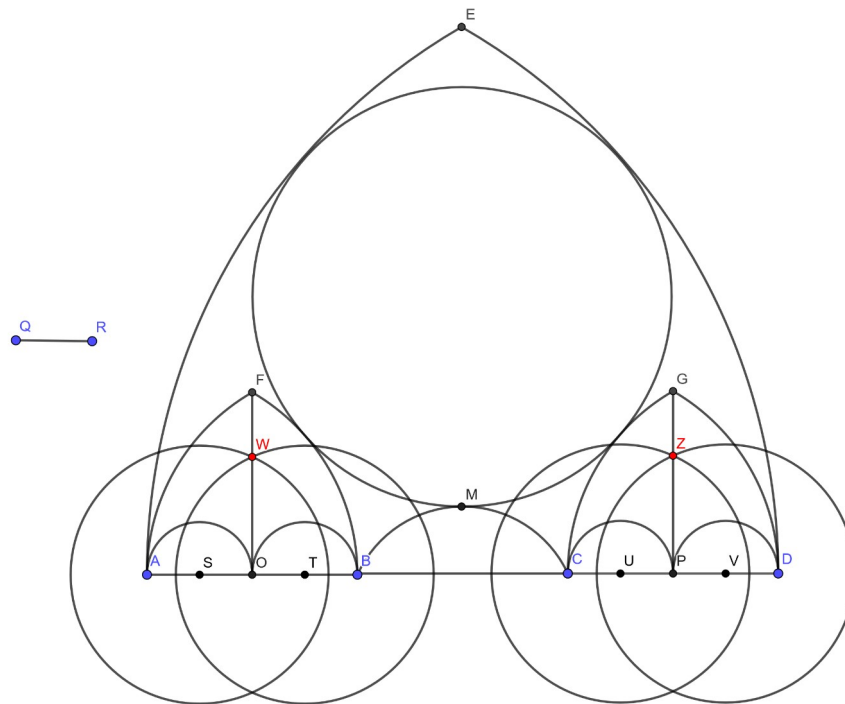
Następnie rysujemy okrąg o środku U i promieniu UP i okrąg o środku V i promieniu VP.

Krok 11.

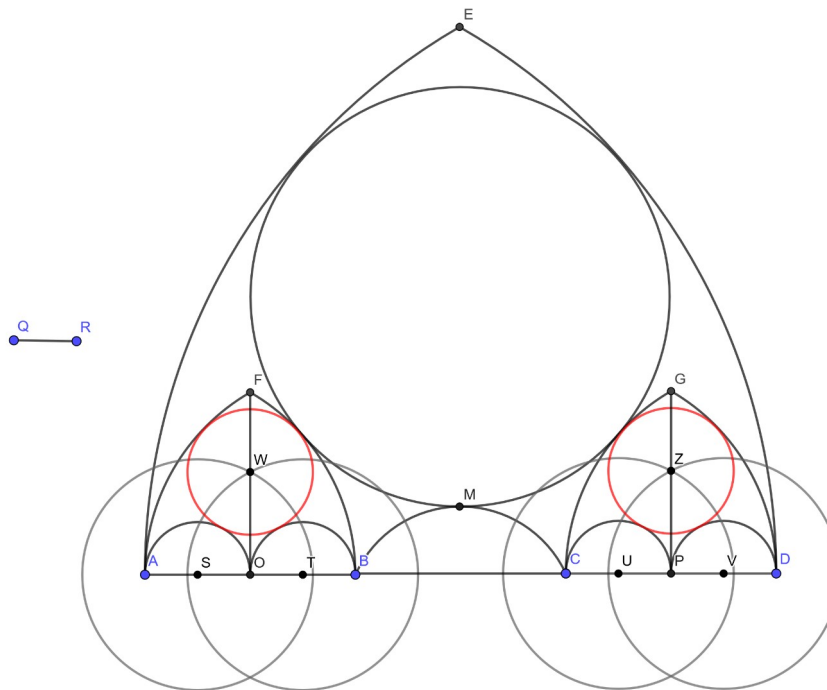
Rysujemy odcinek QR . Następnie rysujemy odcinki OF i PG .

Krok 12.

Rysujemy okrąg o środku S i promieniu $OS+QR$ oraz okrąg o środku T i promieniu $OT+QR$. Następnie rysujemy okrąg o środku U i promieniu $UP+QR$ oraz okrąg o środku V i promieniu $PV+QR$.

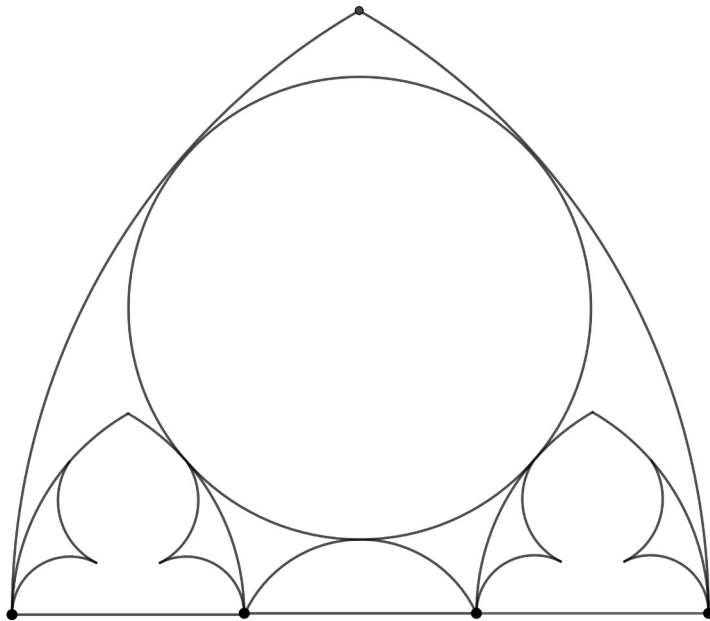
Krok 13.

Zaznaczamy punkt W na przecięciu okręgów z odcinkiem OF. Następnie zaznaczamy punkt Z na przecięciu okręgów z odcinkiem PG.

Krok 14.

Rysujemy okrąg o środku W i promieniu QR. Następnie rysujemy okrąg o środku Z i promieniu QR. Dostosowujemy odcinek QR, żeby te okręgi były styczne do ostrołuku.

Krok 15.



Ukrywamy niepotrzebne części. I oto efekt końcowy!

Matematyka w sztuce gotyku







Portugalia. Klasztor Batalha

Znajduje się w zachodniej części Portugalii. Jest jednym z najwspanialszych przykładów architektury i sztuki gotyku w Portugalii.

Znajduje się na światowej liście dziedzictwa UNESCO

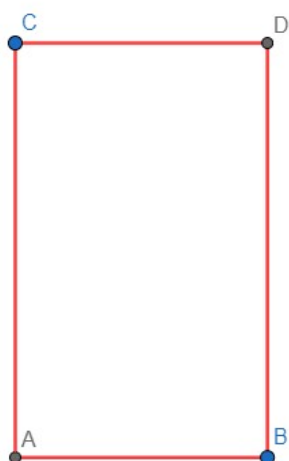
Klasztor został zbudowany w podziękę za pomoc Matki Boskiej i zwycięstwo w bitwie pod Aljubarrota.

Budował się on 150 lat.

Geometryczna konstrukcja okna

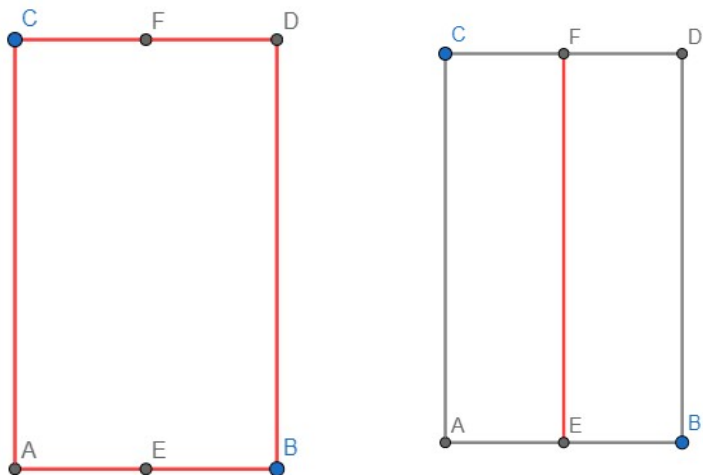
Krok 1

Rysujemy prostokąt o proporcjach boków 23:14



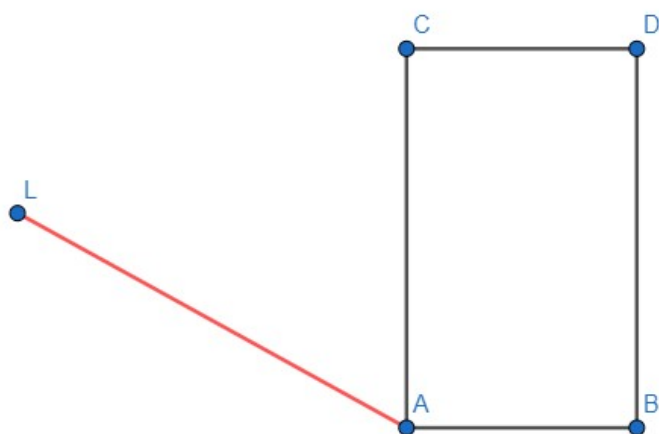
Krótsze boki prostokąta dzielimy na dwie równe części i oznaczamy je punktami E, F.

Łączymy te punkty tworząc odcinek EF.



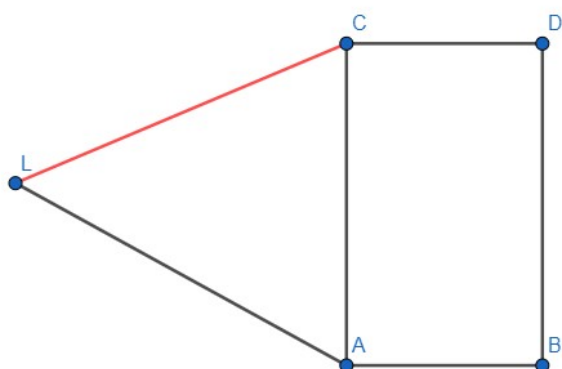
Krok 3

Wed. Twierdzenia Talesa rysujemy z punktu A odcinek o dowolnym kącie

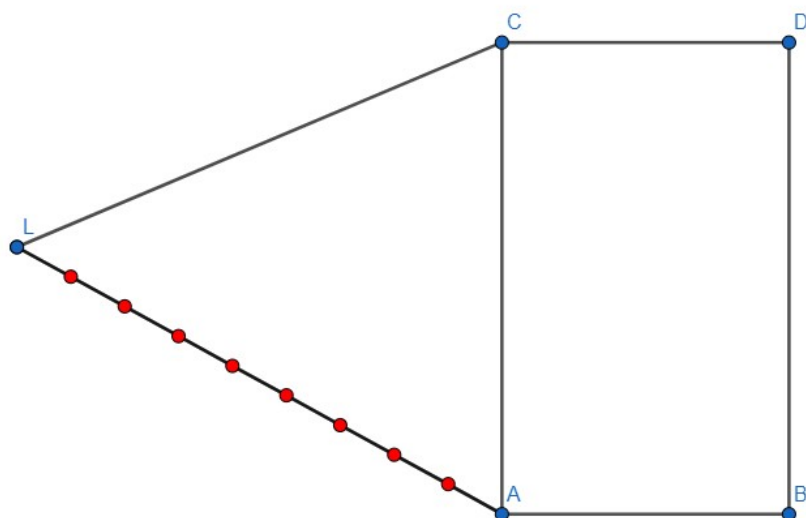


Łączymy koniec tego odcinka z drugim końcem odcinka AD.

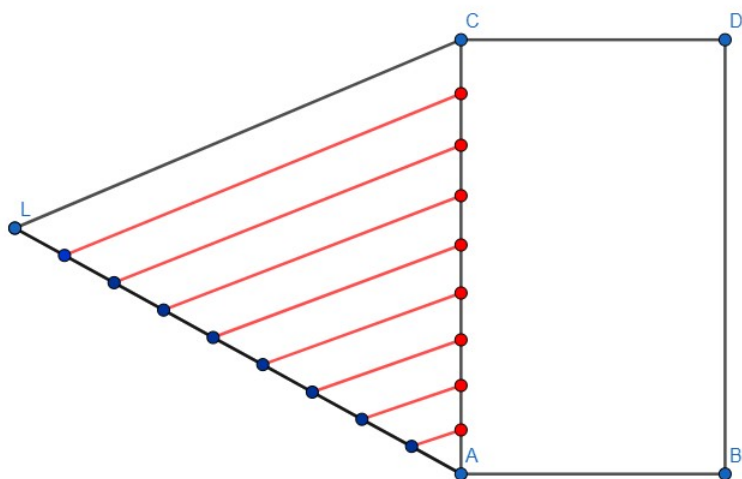
W ten sposób powstaje nam trójkąt ALD.



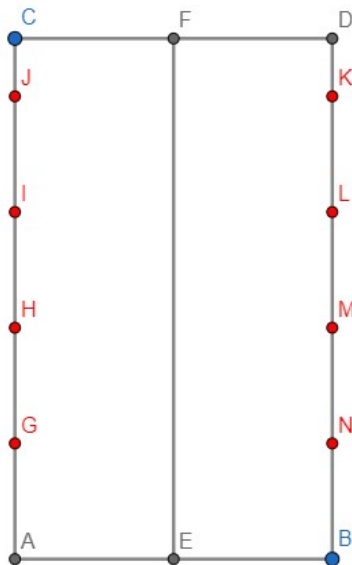
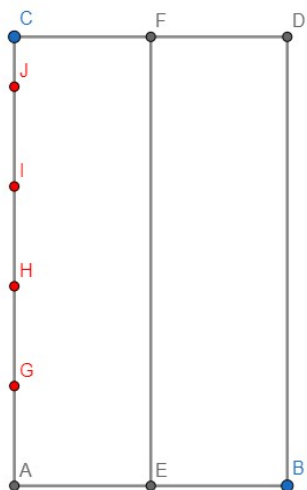
Odcinek AL dzielimy na 9 równych części i oznaczamy je punktami



Łączymy punkty z bokiem AC tak by powstałe odcinki były równoległe do boku LC trójkąta ALC



Usuamy 1,3,5,7 czerwony punkt by otrzymać bok AC podzielony na 4,5 równych części

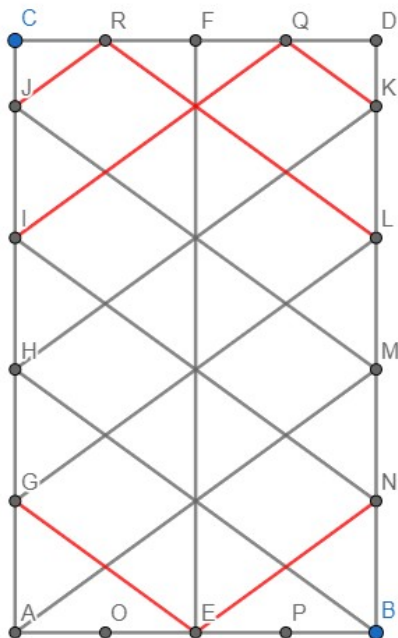
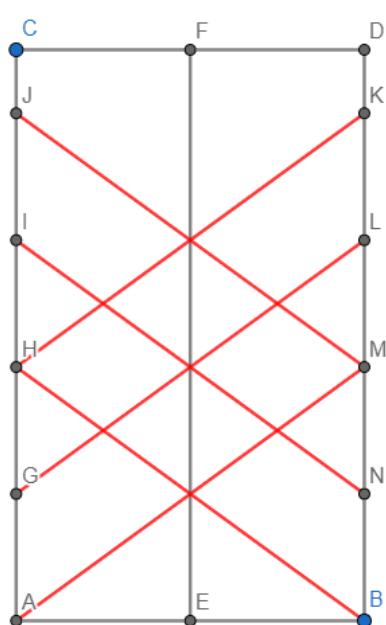


Analogicznie dla przeciwległego boku (K, L, M, N).

Krok 4

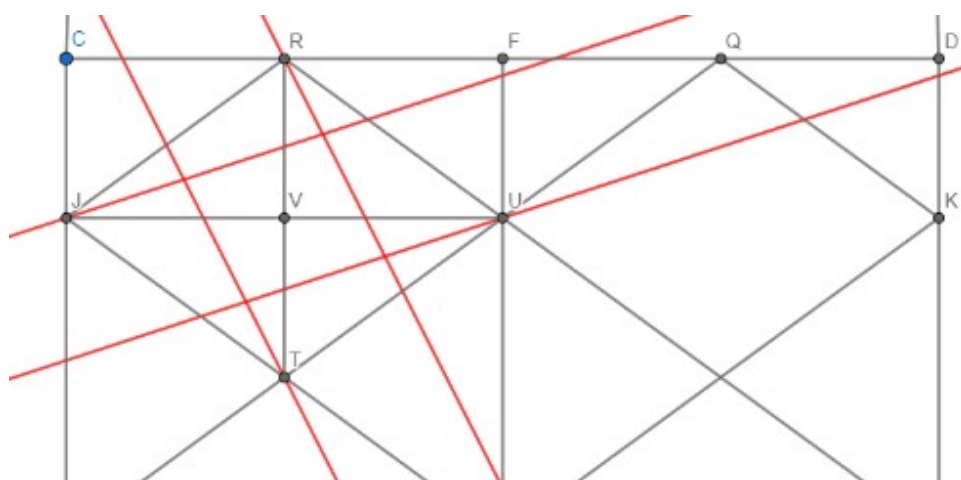
Dzielimy połówki krótszych boków prostokąta na pół, punkty nazywamy (R, Q) i (P, O).

Łączymy powstałe punkty w następujący sposób.



Krok 5

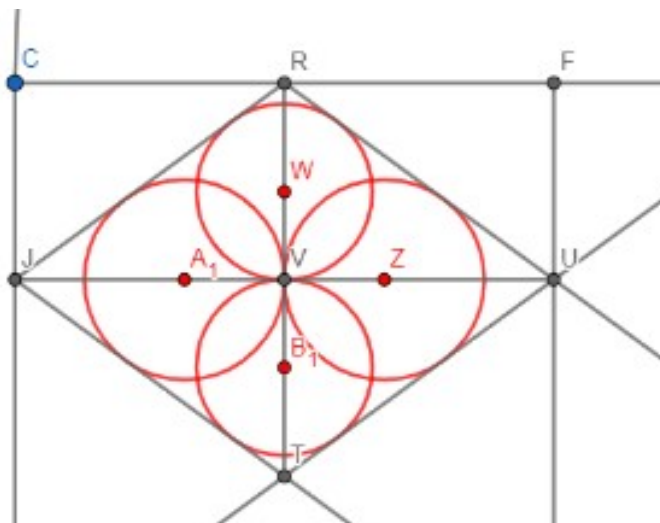
Rysujemy dwusieczne kątów VRU, VUT, VTJ, VJR.



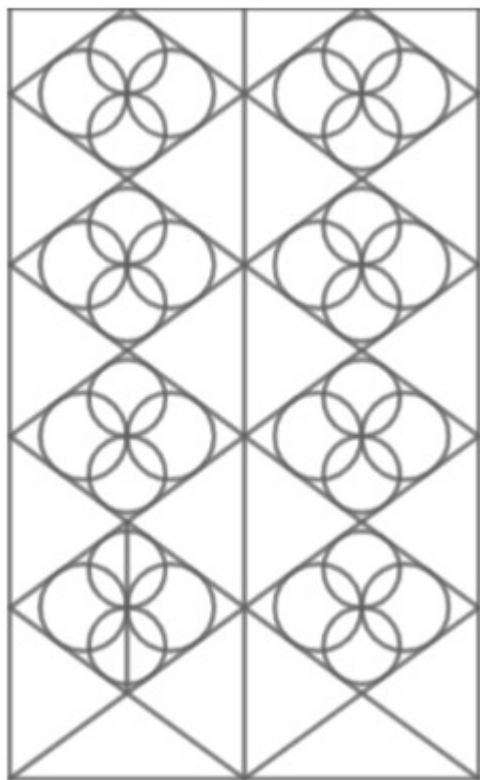
Krok 6

Oznaczamy punkty przecięcia dwusiecznych z przekątnymi rombu.

Rysujemy okręgi o środkach w tych punktach i promieniu równym odległości środka do punktu przecięcia przekątnych rombu.



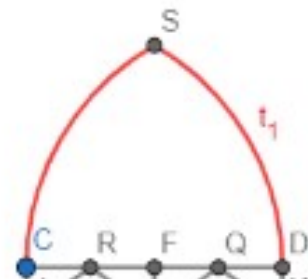
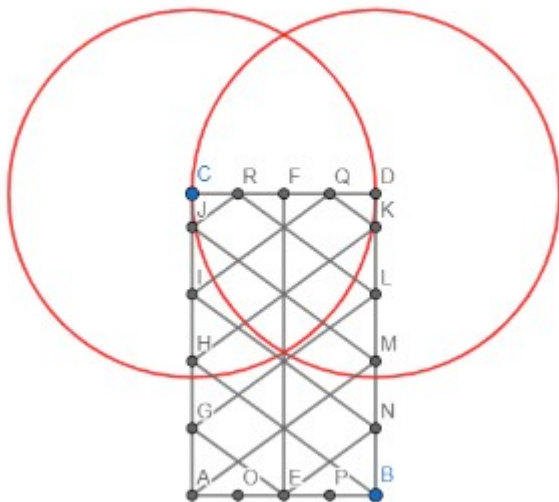
Analogicznie powtarzamy dla każdego rombu nie przeciętego odcinkiem FE



Krok 7

Rysujemy okręgi o środkach w punktach C i D, o promieniu CD. Punkt przecięcia tych 2 okręgów nazywamy S.

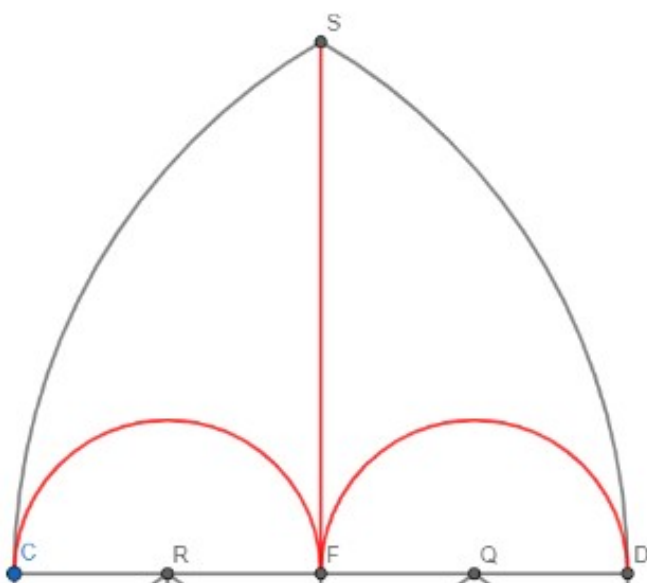
Usuwanie części okręgów w następujący sposób



Krok 8

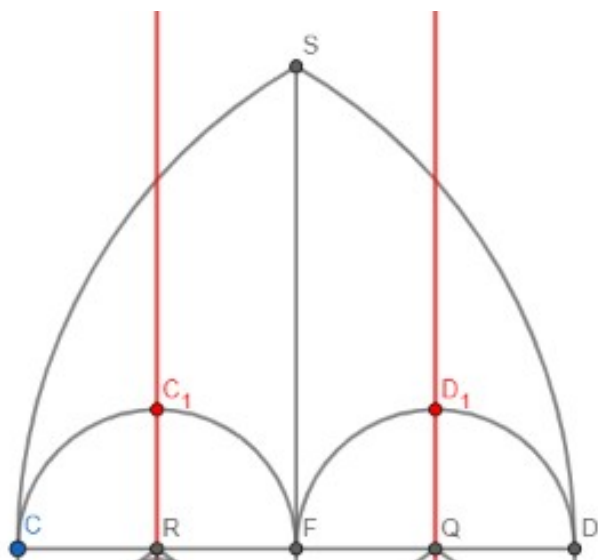
Prowadzimy odcinek SF.

Tworzymy półokręgi o środkach R i Q o promieniu CR i FQ.

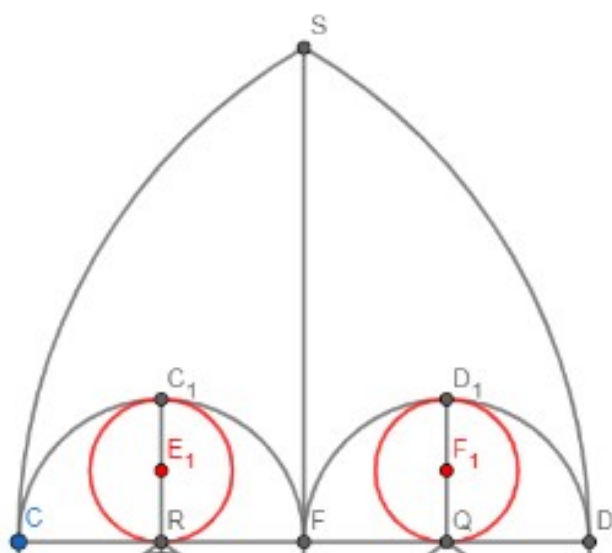


Prowadzimy proste wychodzące z punktów R i Q prostopadłe do odcinka CD

Oznaczamy punkty przecięcia półokręgów z prostymi C1 i D1.



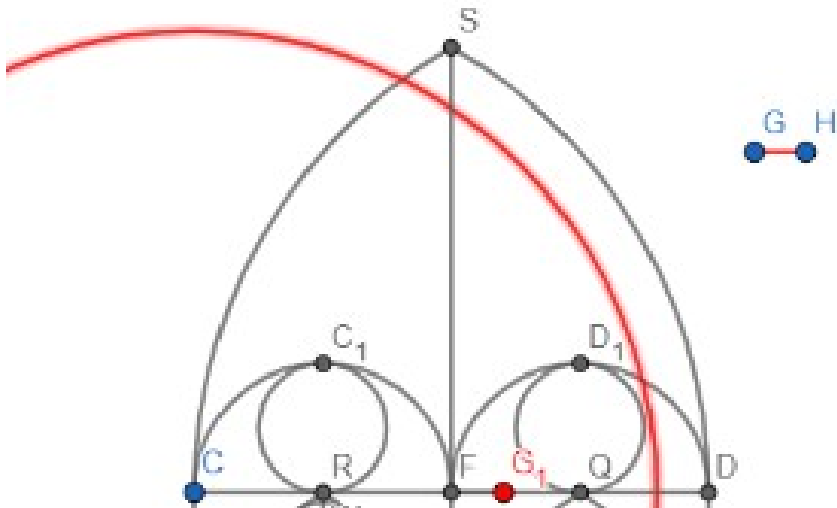
Wyznaczamy środki odcinków C_1R i D_1Q i oznaczamy je E_1 i F_1 . Rysujemy z tych punktów okręgi o promieniach C_1E_1 i D_1F_1 .



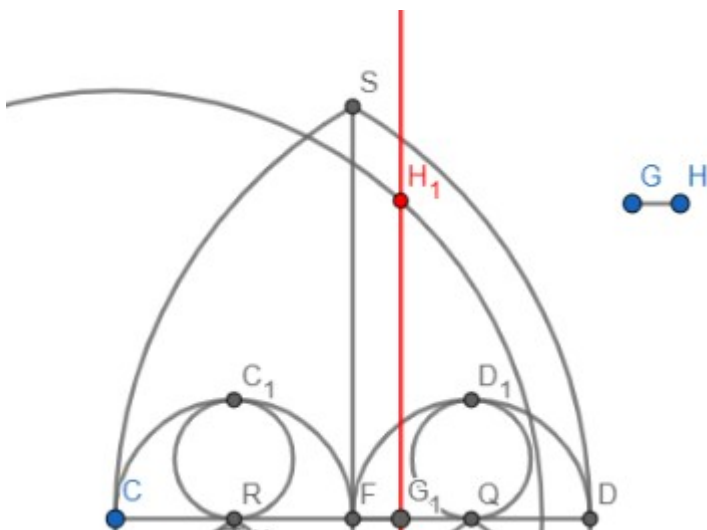
Krok 9

Rysujemy okrąg o środku C i promieniu $CD-GH$, gdzie GH jest pewnym odcinkiem, którego długość będziemy dopasowywać.

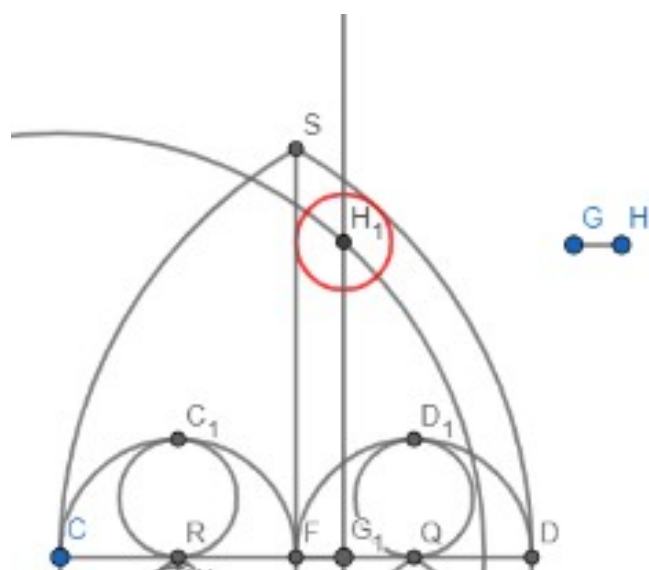
Wyznaczamy punkt G_1 odległy od punktu F o GH



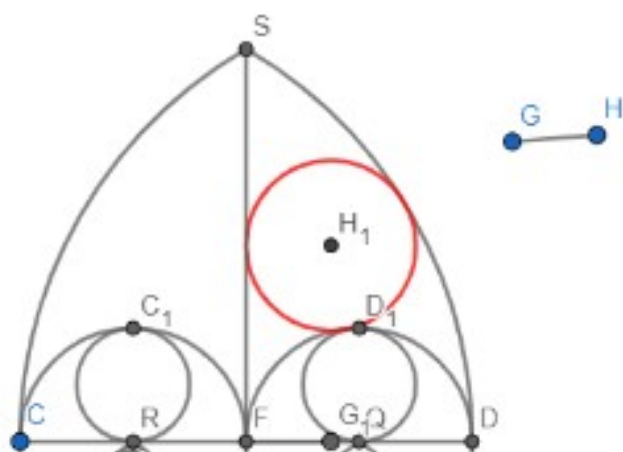
Rysujemy prostą z punktu G_1 prostopadłą do CD , punkt przecięcia prostej i wcześniej narysowanego okręgu nazywamy H_1 .



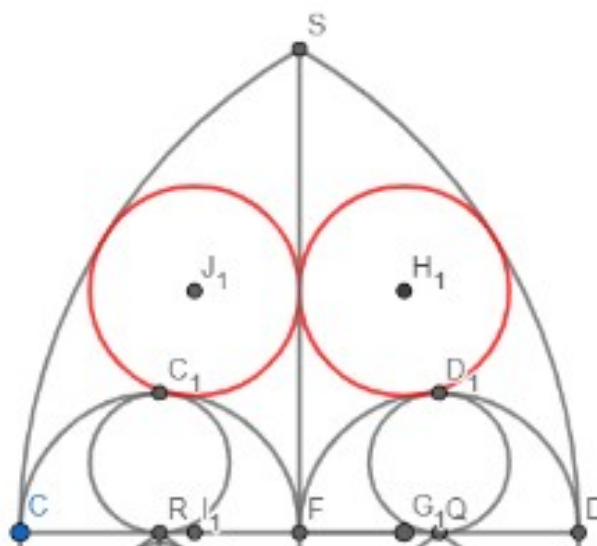
Rysujemy okrąg o środku H_1 i promieniu G_1H_1 , który będzie styczny do łuku SD i prostej SF



Odpowiednio dostosowujemy długość odcinka GH tak, aby okrąg o środku H_1 był też styczny półokręgu FD .



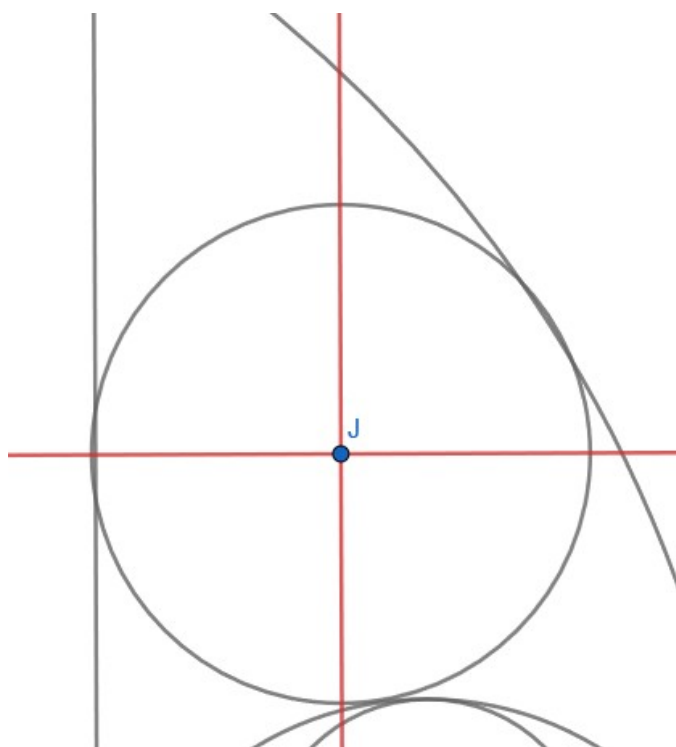
Analogicznie dla drugiej połowy ostrołuku.



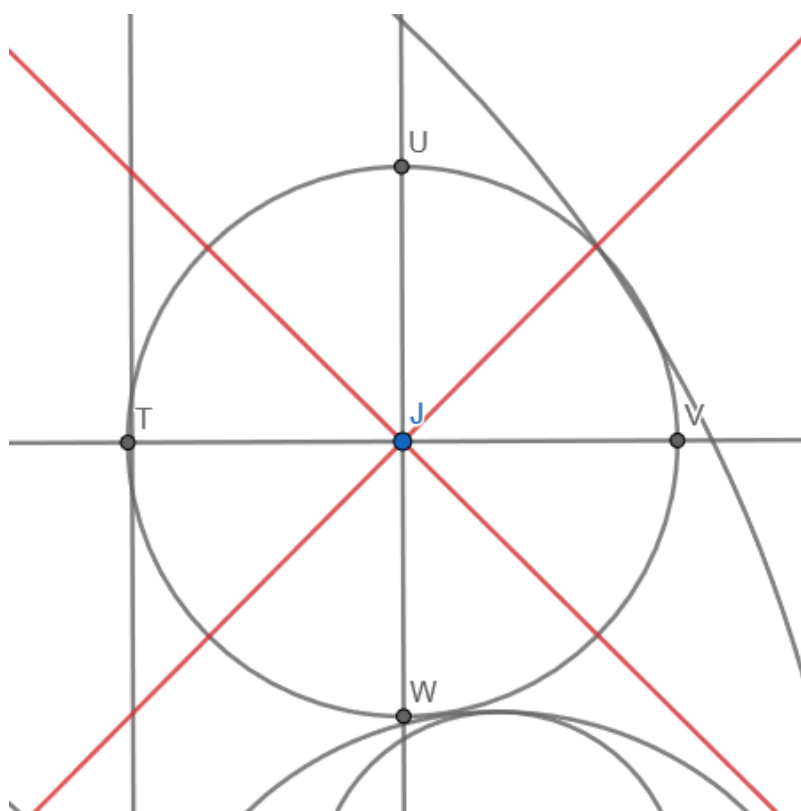
Krok 10

Z środka okręgu prowadzimy prostą równoległą do CD oraz prostą równoległą do FS

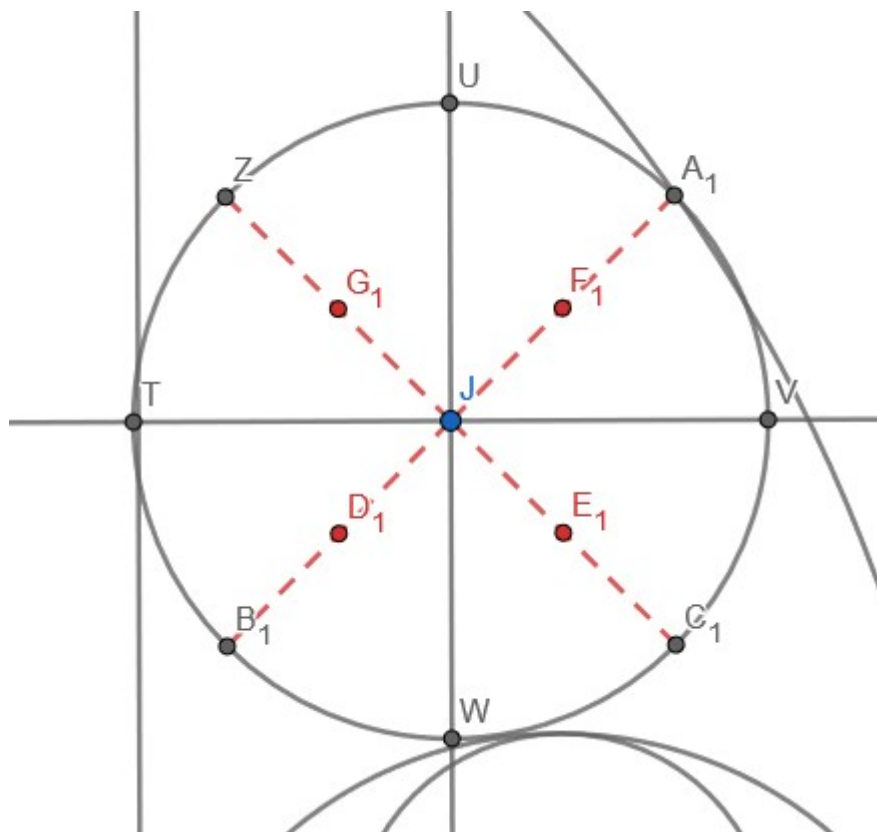
Proste te przecinają się pod kątem 90 stopni



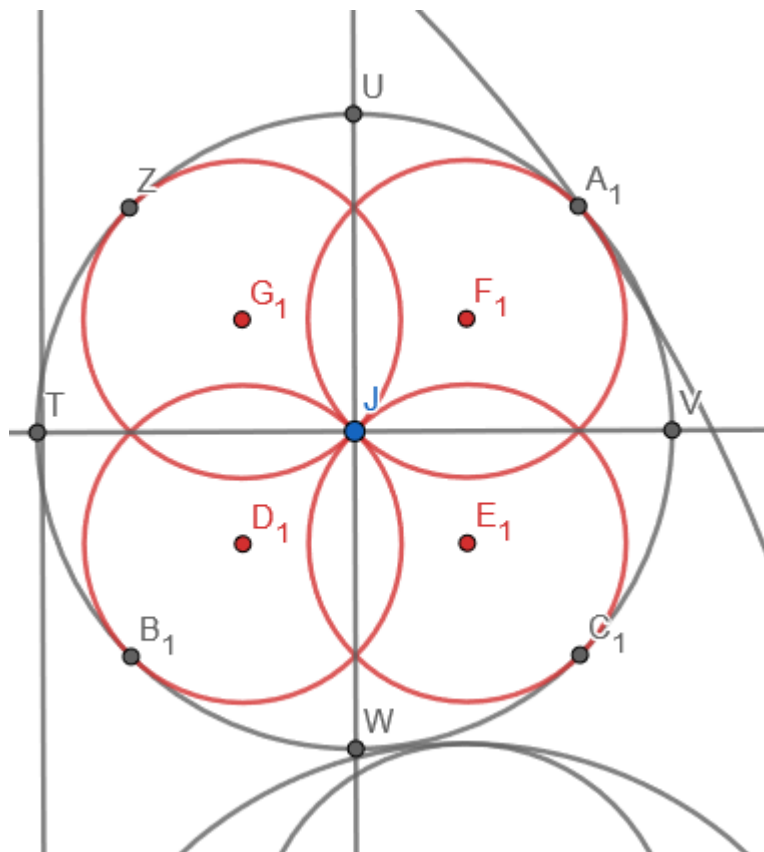
Rysujemy dwusieczne między tymi prostymi



Wyznaczamy środki promieni okręgu powstałych z narysowanych dwusiecznych

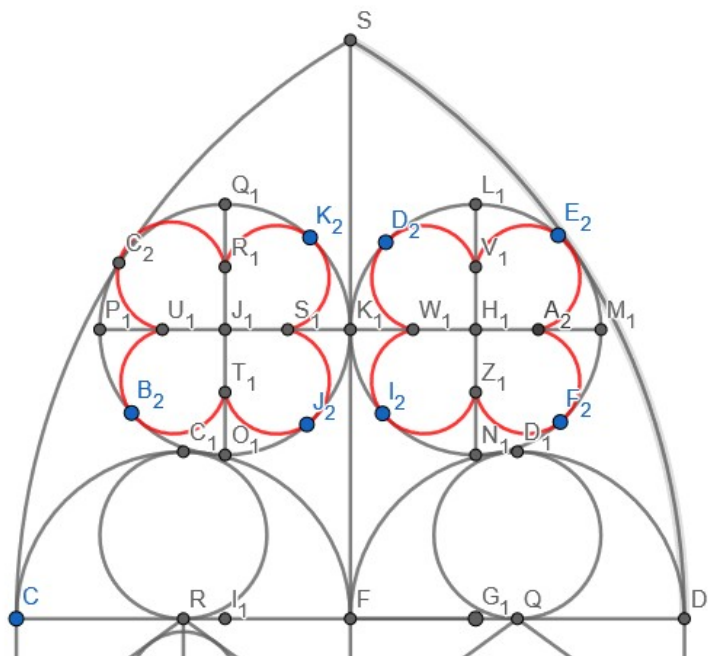


Rysujemy okręgi o środkach w tych punktach i promieniu równym połowie promienia

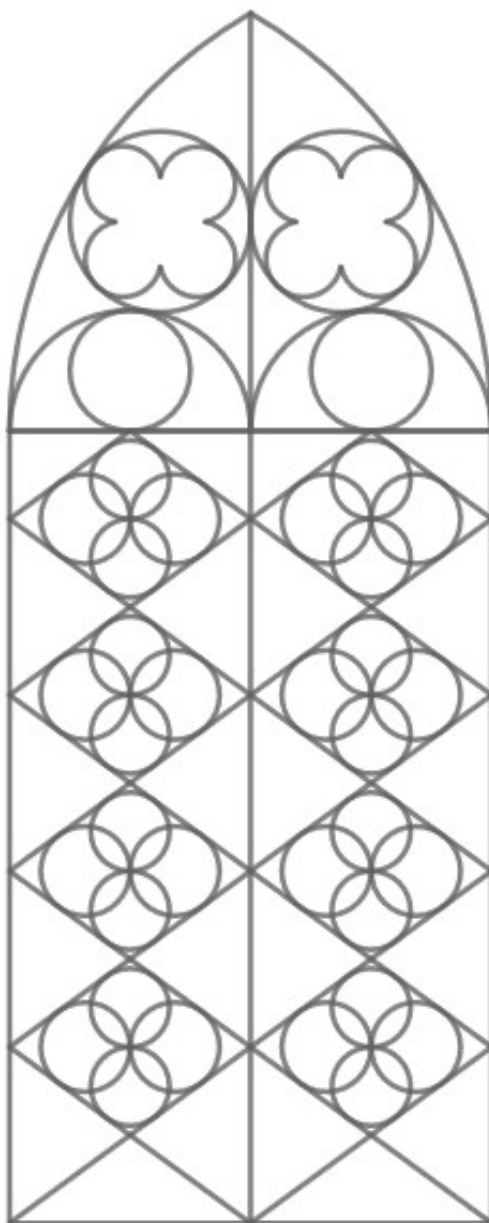


Usuujemy niepotrzebne łuki.

Analogicznie robimy dla drugiego koła



Końcowy wynik



Czerwiec 2022

Grupa nr 3:

Michalina Kuczmierczyk

Antonina Dalek

Michał Kruss

MATEMATYKA W SZTUCE GOTYKU

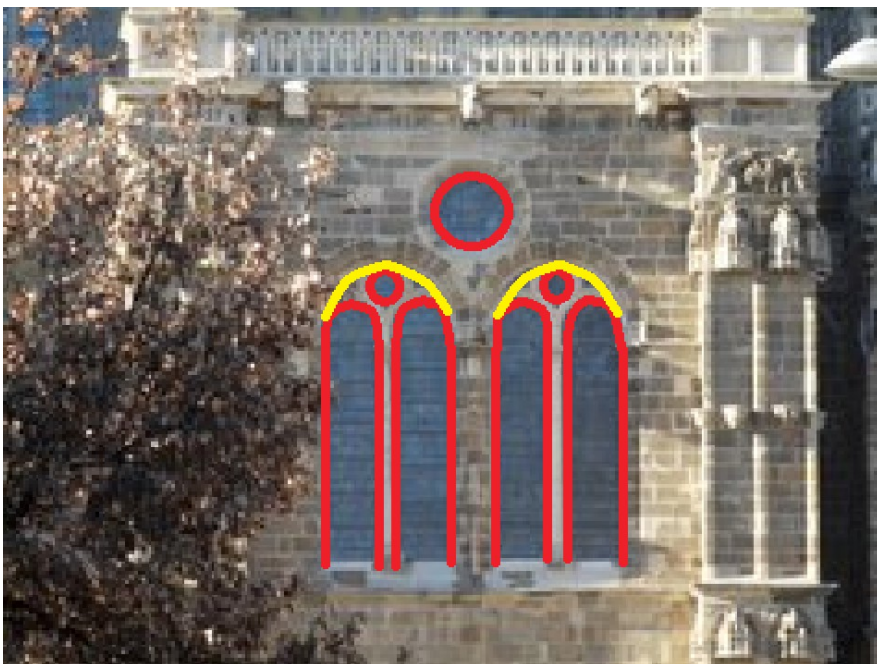
Bruno Pocięcha i Jan Ciborowski

Poniższe okno pochodzi z Hiszpanii z katedry La Catedral de Santa María de Astorga w miejscowości Astorga.

Katedra Astorga to kościół rzymskokatolicki w Astorga w Hiszpanii. Został ogłoszony zabytkiem narodowym w 1931 r. Gotycki gmach powstał w 1471 r.

Zdjęcie okna i katedry:

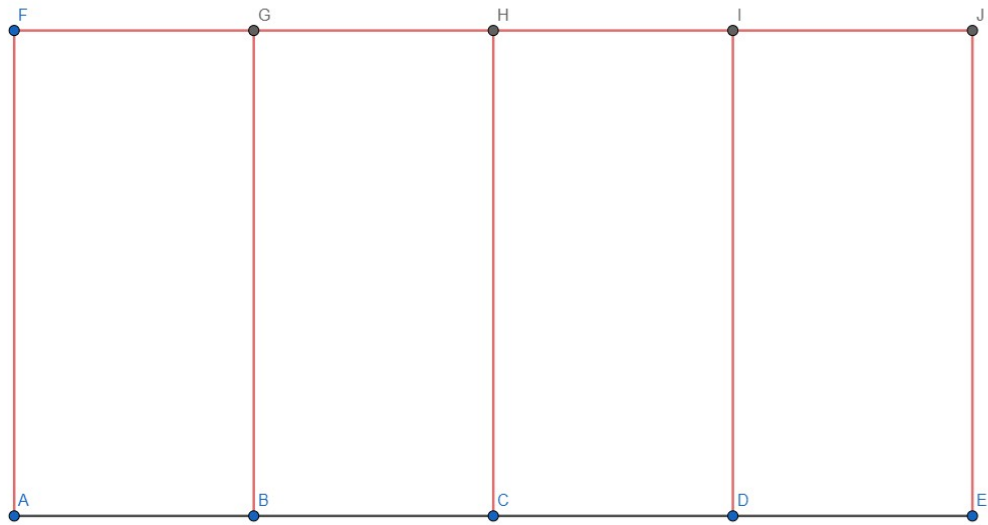




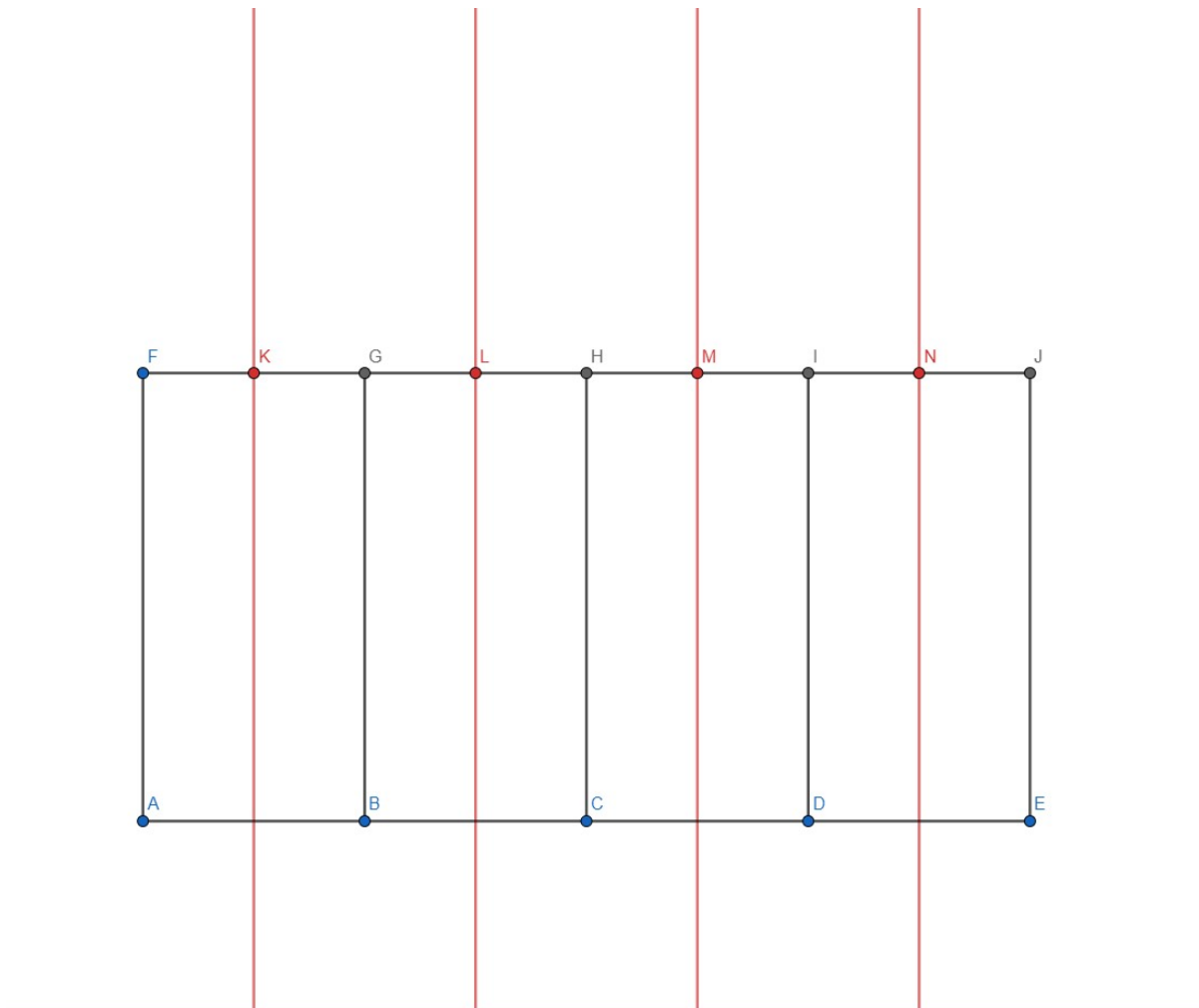
KROK 1. Rysujemy odcinek i dzielimy go na cztery równe części.



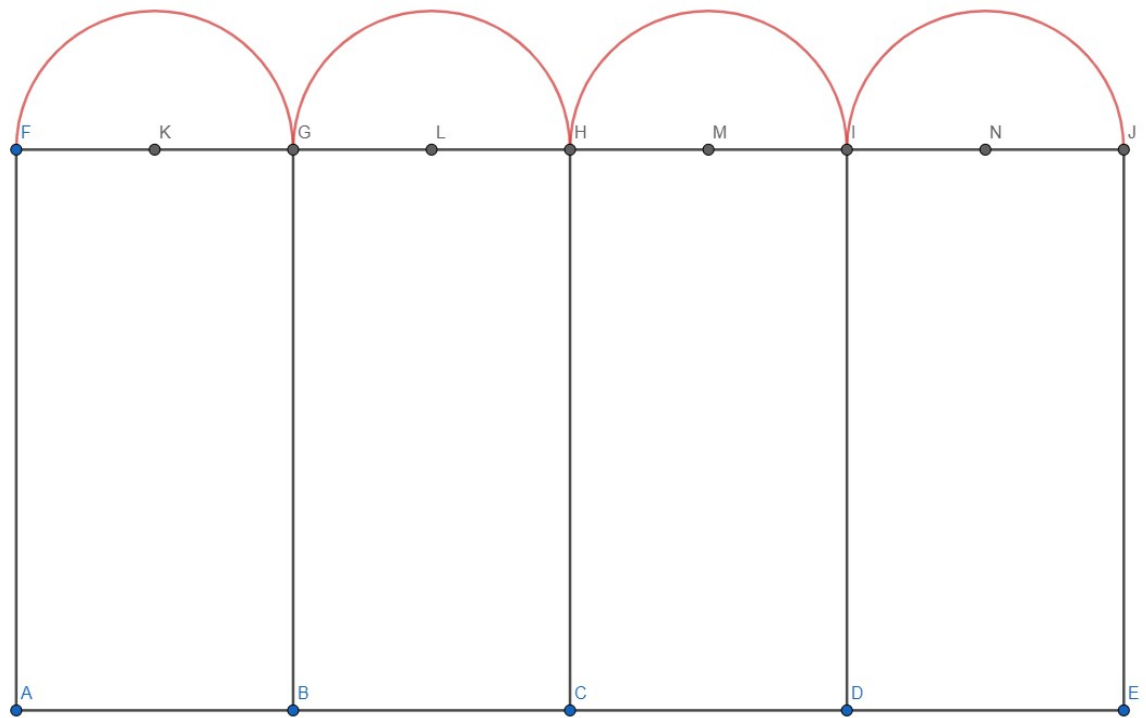
KROK 2. Rysujemy jeden równoległy do podstawy odcinek i 5 prostopadłych do niego w punktach.



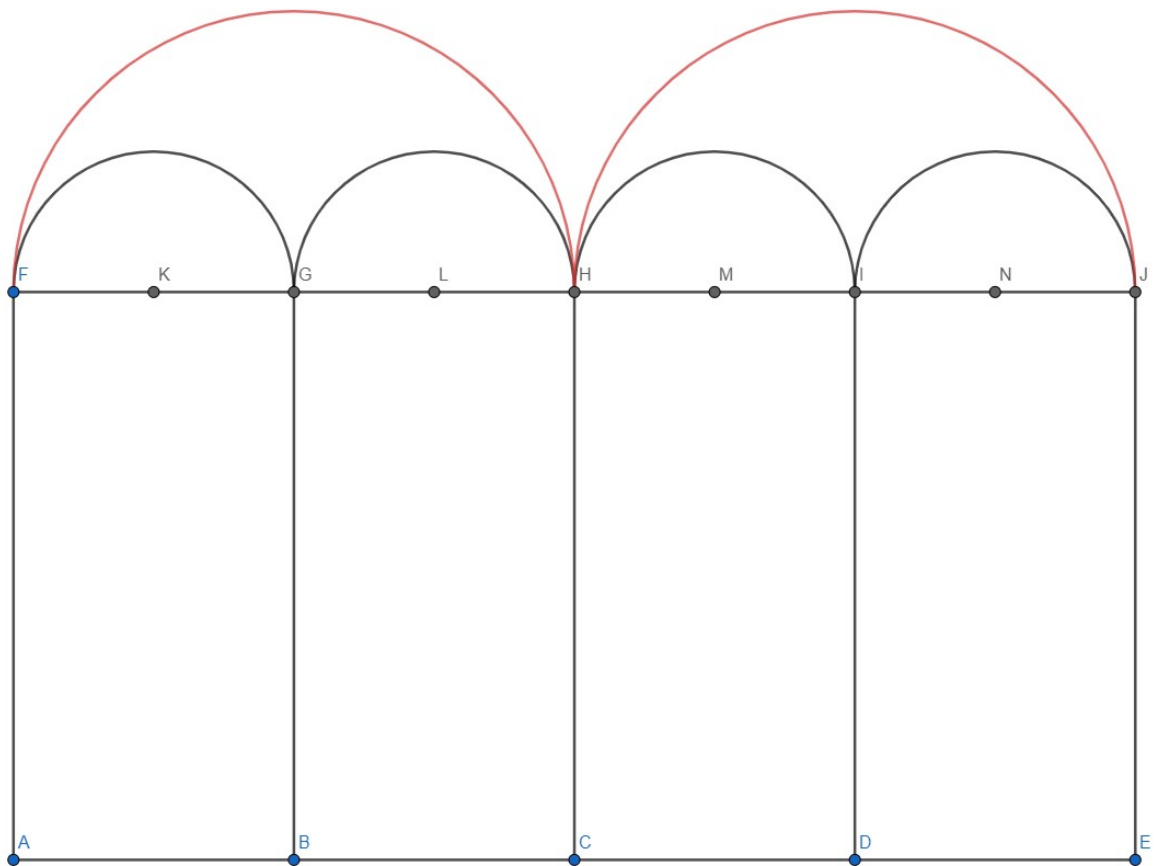
KROK 3. Za pomocą symetralnych wyznaczamy środki górnych odcinków FG, GH, HI, IJ.



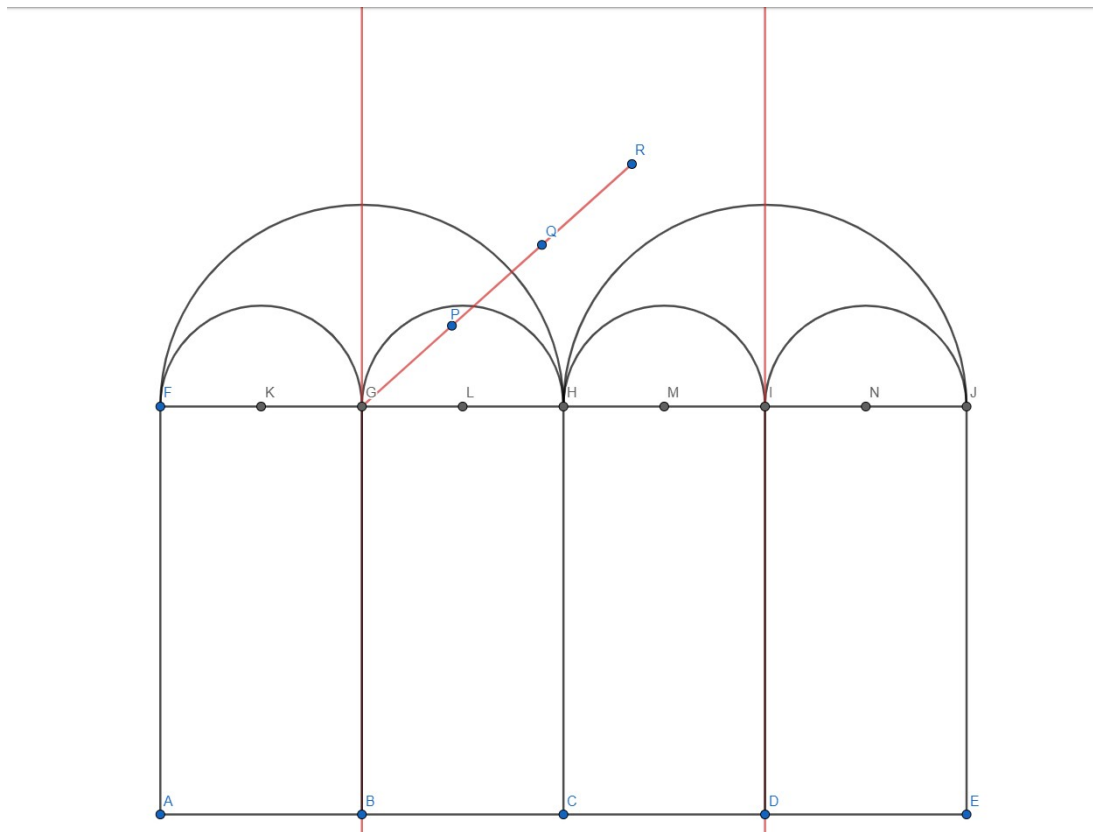
KROK 4. Rysujemy 4 łuki o promieniach równych połowie odcinków FG, GH, HI, IJ i środkach K, L, M, N.



KROK 5. Rysujemy dwa łuki jeden ośrodku G i promieniu FG a drugi o środku I i promieniu HI.



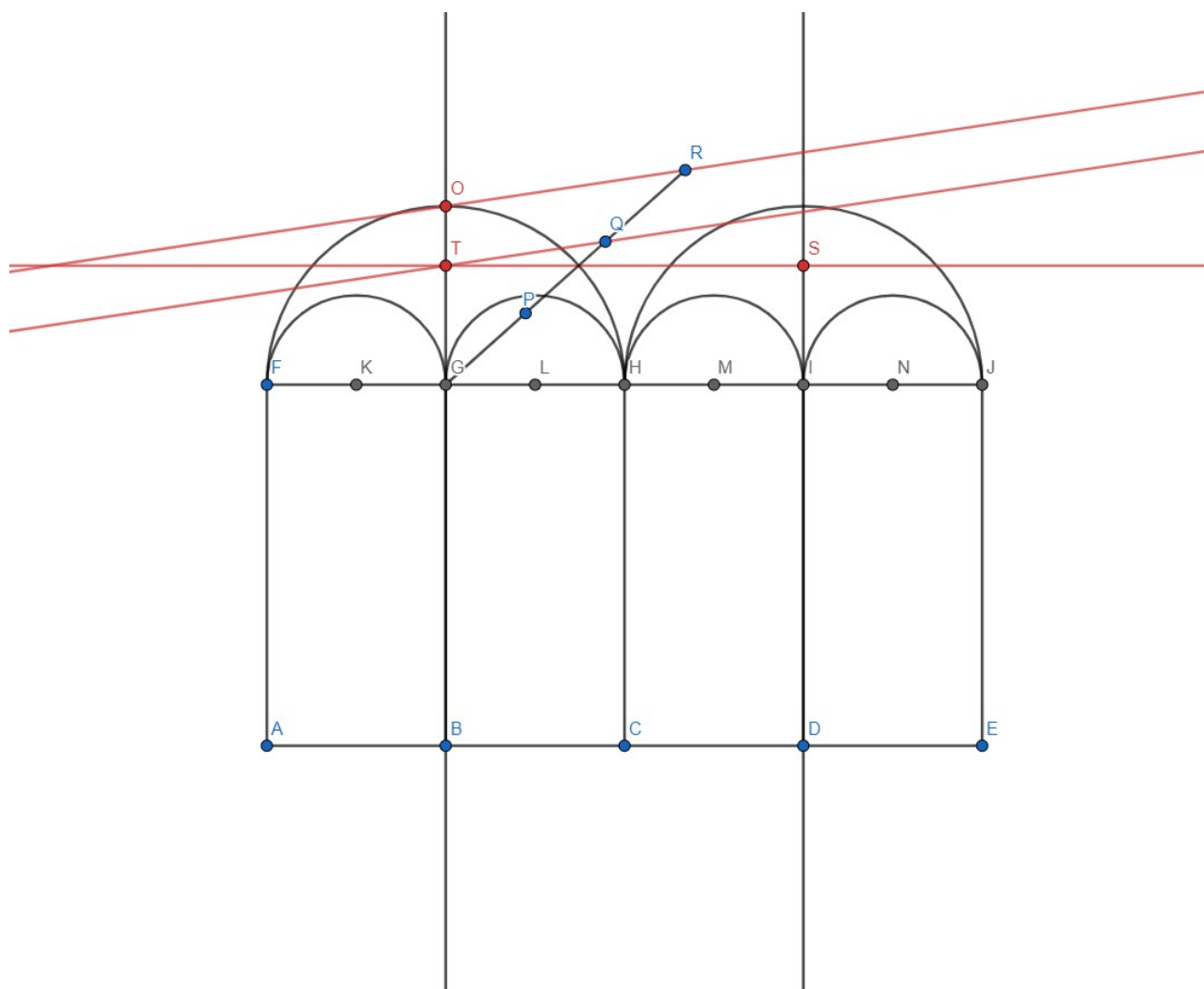
KROK 6. Rysujemy symetralne odcinków KL i MN i z punktu G rysujemy półprostą i odkładamy na niej 3 równe odcinki



Maj 2022

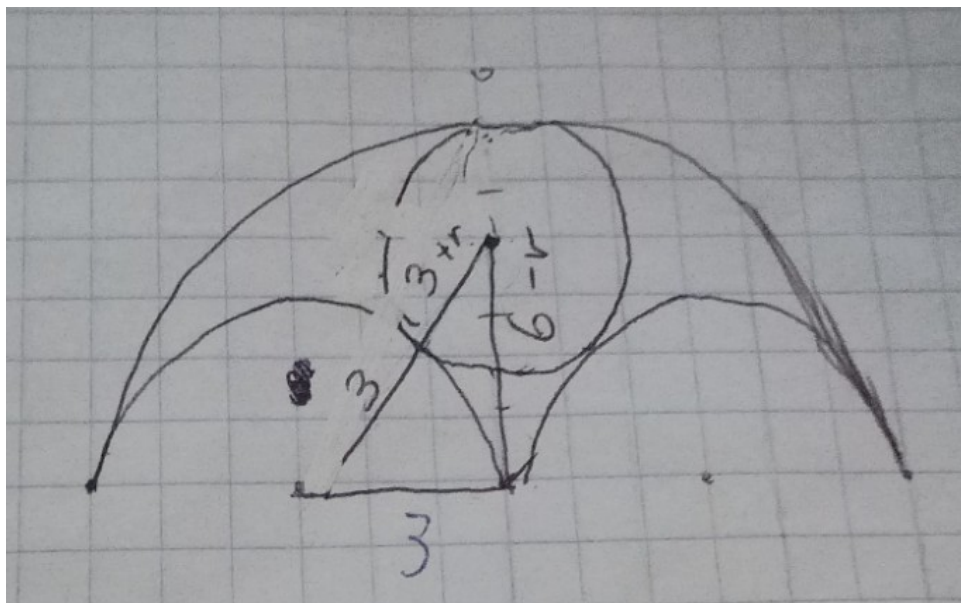
Grupa nr 4: Bruno Pocięcha, Jan Ciborowski

KROK 7. Rysujemy symetralne odcinków KL i MN i z punktu G rysujemy półprostą i odkładamy na niej 3 równe odcinki, aby przeprowadzić konstrukcję podziału odcinka na trzy równe części, wynikającą z twierdzenia Talesa. Prowadzimy prostą RO oraz równoległą do niej prostą QT. Dzięki temu dzielimy odcinek GO w proporcji 2:1 i wyznaczamy środek T i promień OT okręgu, który chcemy wpisać.



Obliczenia, które uzasadnią powyższą konstrukcję:

Niech r będzie promieniem okręgu, który chcemy wpisać, niech $FG=6$, więc $KG=3$, $KT=3+r$, $GT=6-r$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta KGT mamy:



Obliczenia:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$3^2 + (6 - r)^2 = (3 + r)^2$$

$$3^2 + 6^2 - 2 \times 6r + r^2 = 3^2 + 2 \times 3r + r^2$$

$$9 + 36 - 12r + r^2 = 9 + 6r + r^2 \quad | -r^2$$

$$9 + 36 - 12r = 9 + 6r \quad | -9$$

$$36 - 12r = 6r \quad | :6$$

$$6 - 2r = r \quad | +2r$$

$$6 = 3r \quad | :3$$

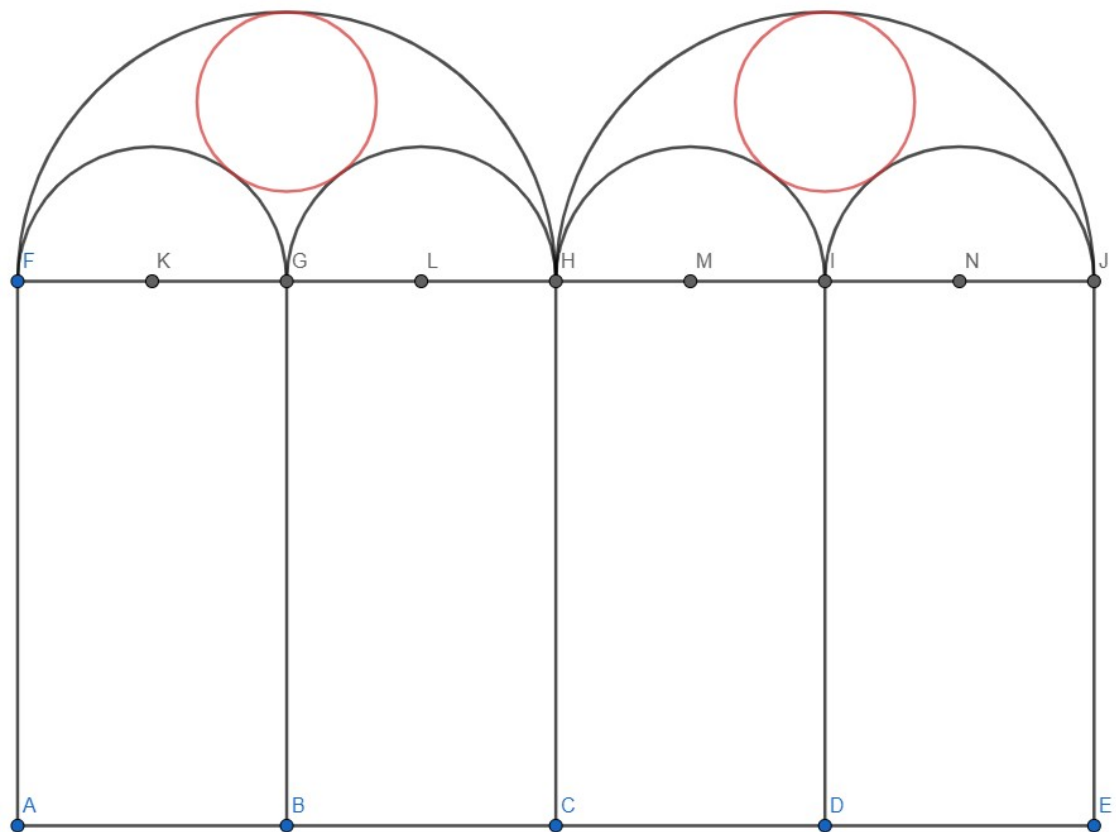
$$r = 2$$

Szukany promień jest więc trzy razy krótszy od $FG=GO$

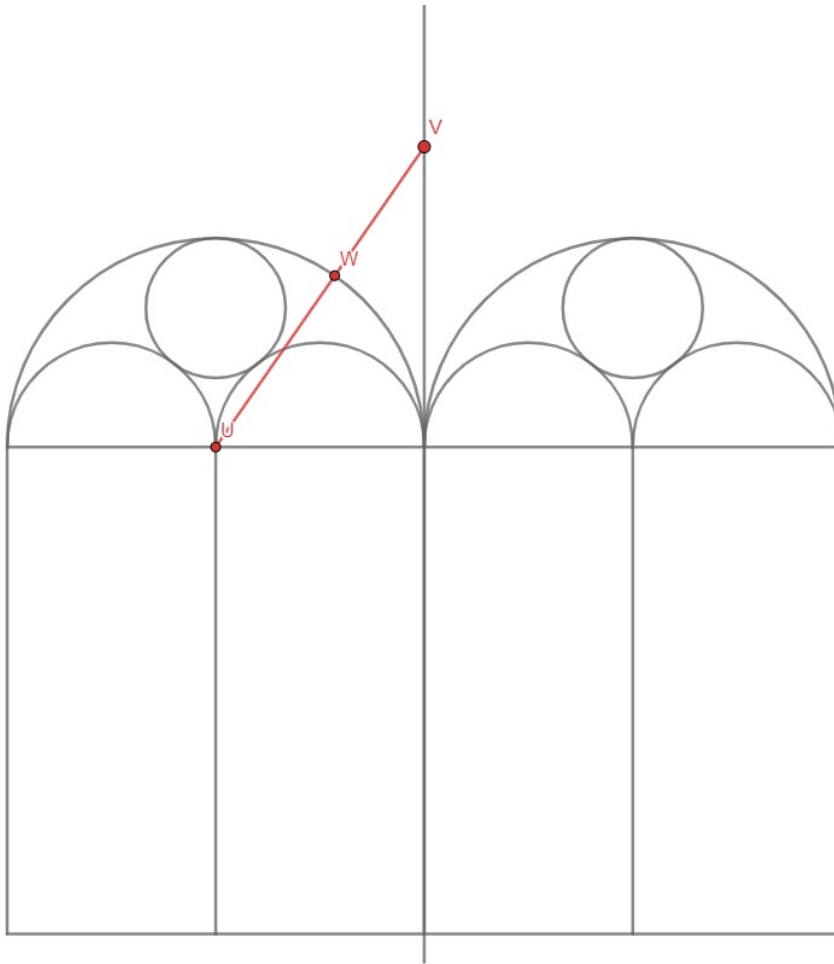
Maj 2022

Grupa nr 4: Bruno Pocięcha, Jan Ciborowski

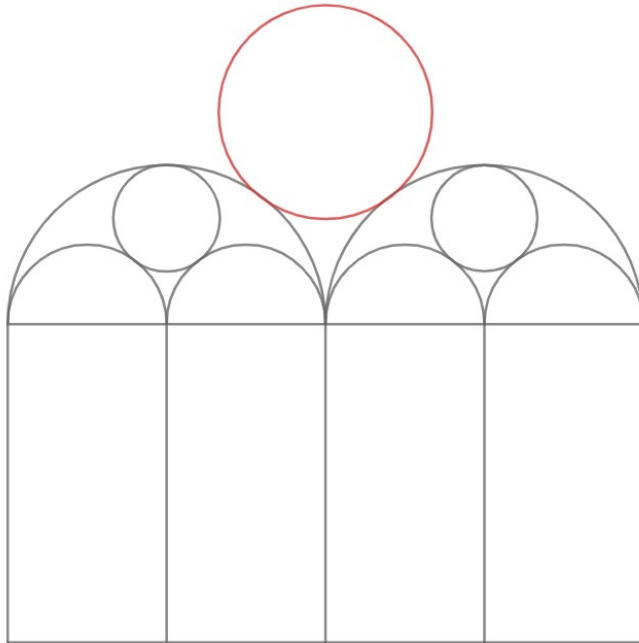
KROK 8. Dokładnie rysujemy okręgi o środku T i S i promieniu TO będą one styczne do odpowiednich łuków oraz ukrywamy niepotrzebne linie.



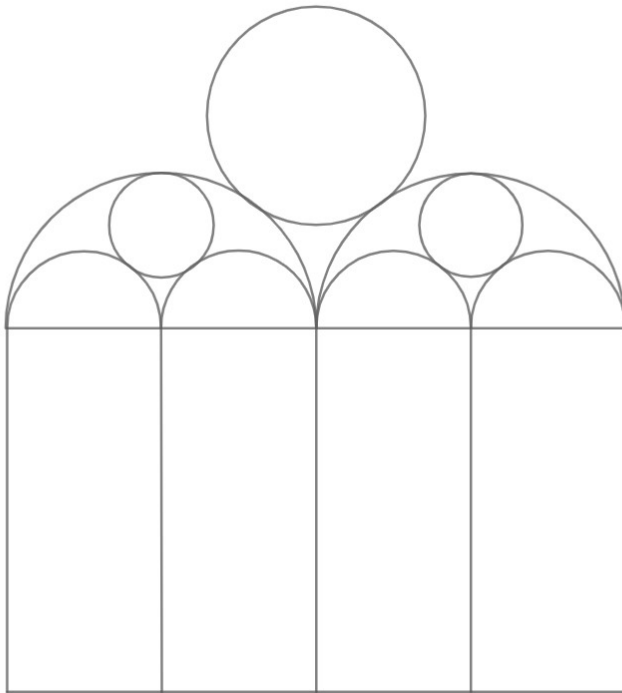
KROK 9. bierzemy punkt V na symetralnej odcinka LM, łączymy go odcinkiem ze środkiem łuku i wtedy na przecięciu odcinka i łuku zaznaczamy punkt W i mamy promień WV okręgu o środku V, który chcemy narysować.



KROK 10. Rysujemy okrąg o środku O i promieniu OQ.



A oto efekt końcowy.



Czerwiec 2022

Matematyka w sztuce gotyku

Grupa nr 5: Natalia Jończyk i Paulina Myśliwi



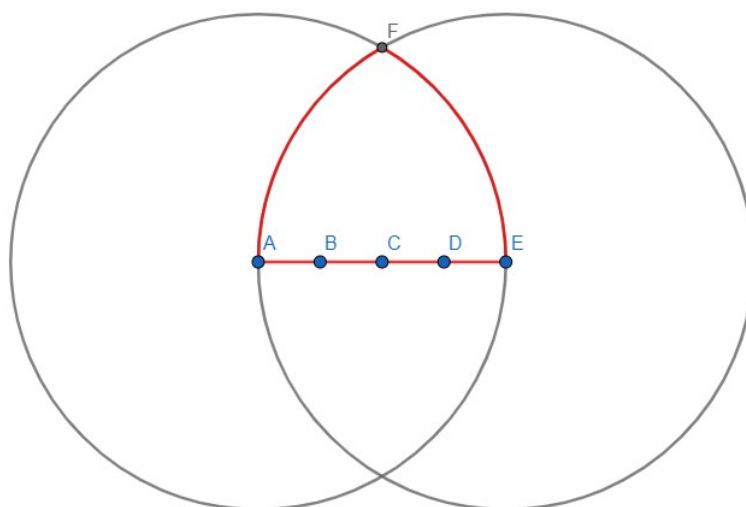
Nasze Okno

Tak wygląda okno, którego konstrukcję pokażemy. Pochodzi ze Strasburga i znajduje się w katedrze Najświętszej Marii Panny.



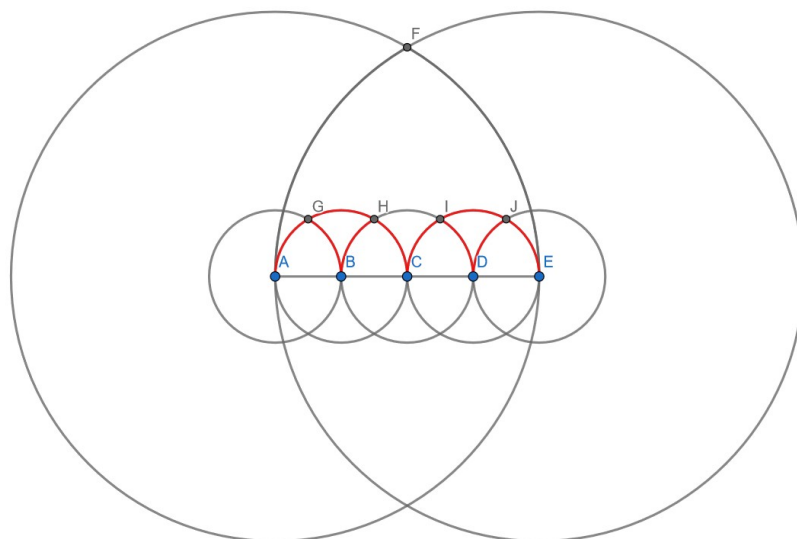
Krok 1

Rysujemy odcinek AE i dzielimy go na 4 równe części, które oddzielamy punktami B, C oraz D. Rysujemy również dwa okręgi. Jeden o promieniu AE i środku A oraz drugi również o promieniu AE, lecz tym razem środku E. Powstaje nam figura o nazwie ostrołuk o podstawie AE.



Krok 2

Rysujemy teraz 5 okręgów o środkach A, B, C, D oraz E o promieniach odpowiednio AB, BC, CD, DE oraz ED. Do konstrukcji naszego okna będziemy potrzebować połowy okręgu o środku B (łuk AGHC) oraz połowy okręgu o środku D (łuk CIJE). Środek okręgu B łączymy łukami z jego punktami przecięcia z okręgami o środkach A oraz C. Środek okręgu D łączymy z jego punktami przecięcia z okręgami o środkach C i E. Pozostawiamy tylko potrzebne łuki.

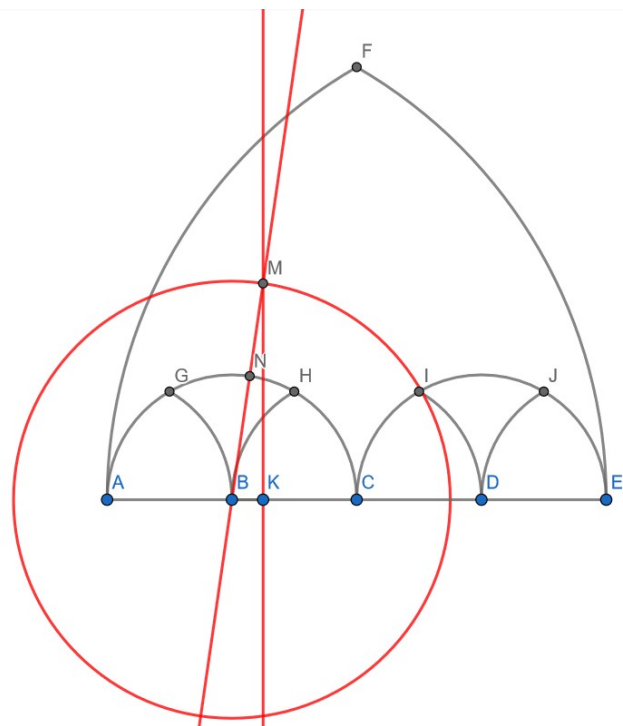


Krok 3

Przyjmujemy, że odcinek AB ma długość „a”, która jest również odpowiednio długością odcinków BC, CD i DE, a promień okręgu, który będziemy konstruować nazywamy „r”. Teraz z równania:

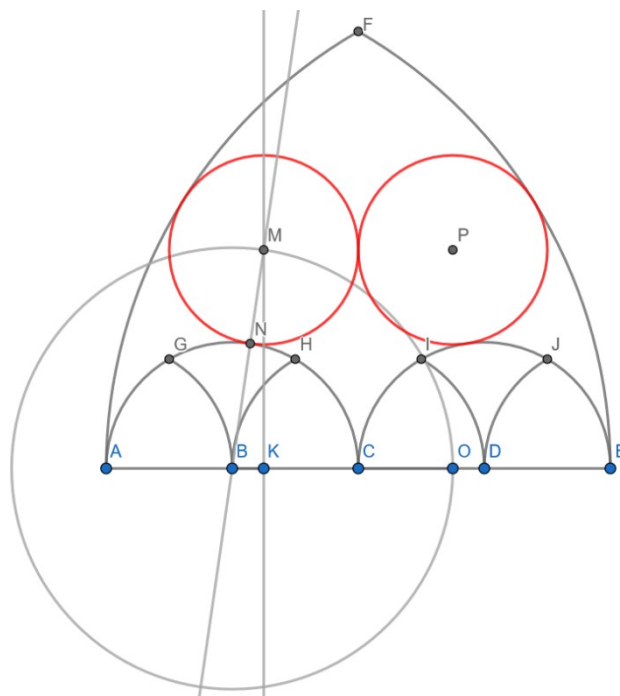
$$\begin{aligned}(a+r)^2 - (a-r)^2 &= (4a-r)^2 - (2a+r)^2, \\ a^2+2ar+r^2-a^2+2ar-r^2 &= 16a^2-8ar+r^2-4a^2-4ar-r^2, \\ 16ar &= 12a^2, \\ r &= \frac{3}{4} \cdot a\end{aligned}$$

wynika, że promień okręgu będzie miał $\frac{3}{4}$ długości a. Dlatego na odcinku AE zaznaczymy punkt oddalony od punktu C (środek AE) o $\frac{3}{4}a$ i zaznaczymy go literą K. Przez punkt K prowadzimy prostą prostopadłą do odcinku AE na której będzie znajdował się środek okręgu. Następnie odmierzamy cyrklem z punktu B odległość $a + r$. Na przecięciu okręgu o środku B i prostej przechodzącej przez K zaznaczamy punkt M, który będzie środkiem okręgu o promieniu r, a punktem N zaznaczamy punkt styczności półokręgu B i okręgu M.



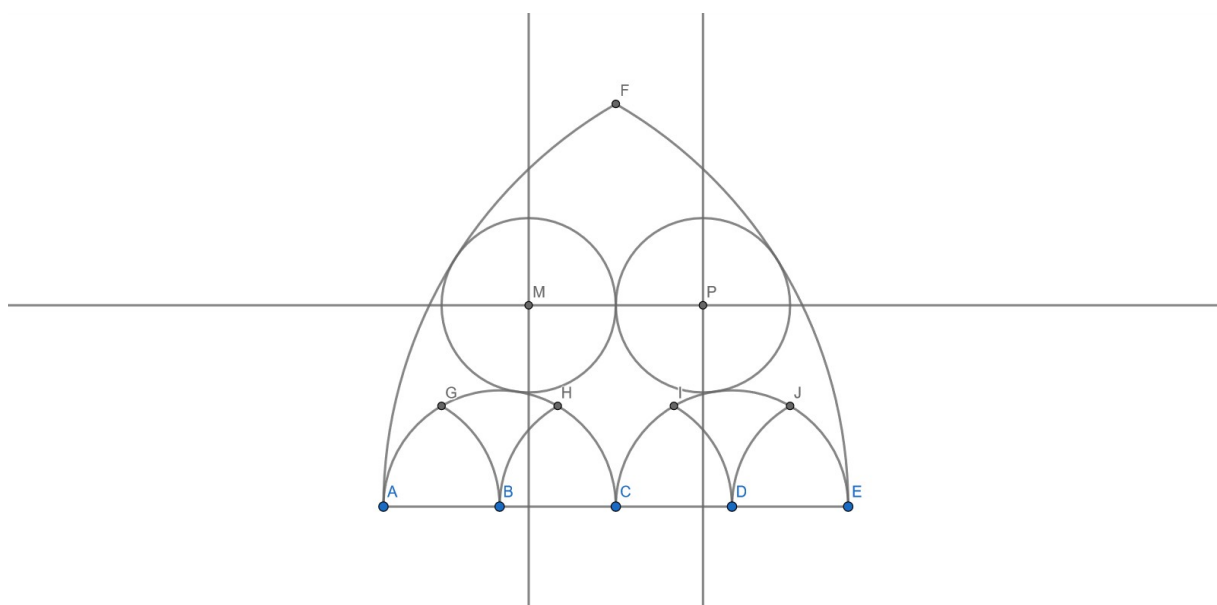
Krok 4

Teraz, rysujemy okrąg o środku M i analogicznie tym samym sposobem co w kroku 3, wyróżniamy punkt P i rysujemy drugi okrąg, którego punkt P będzie środkiem.



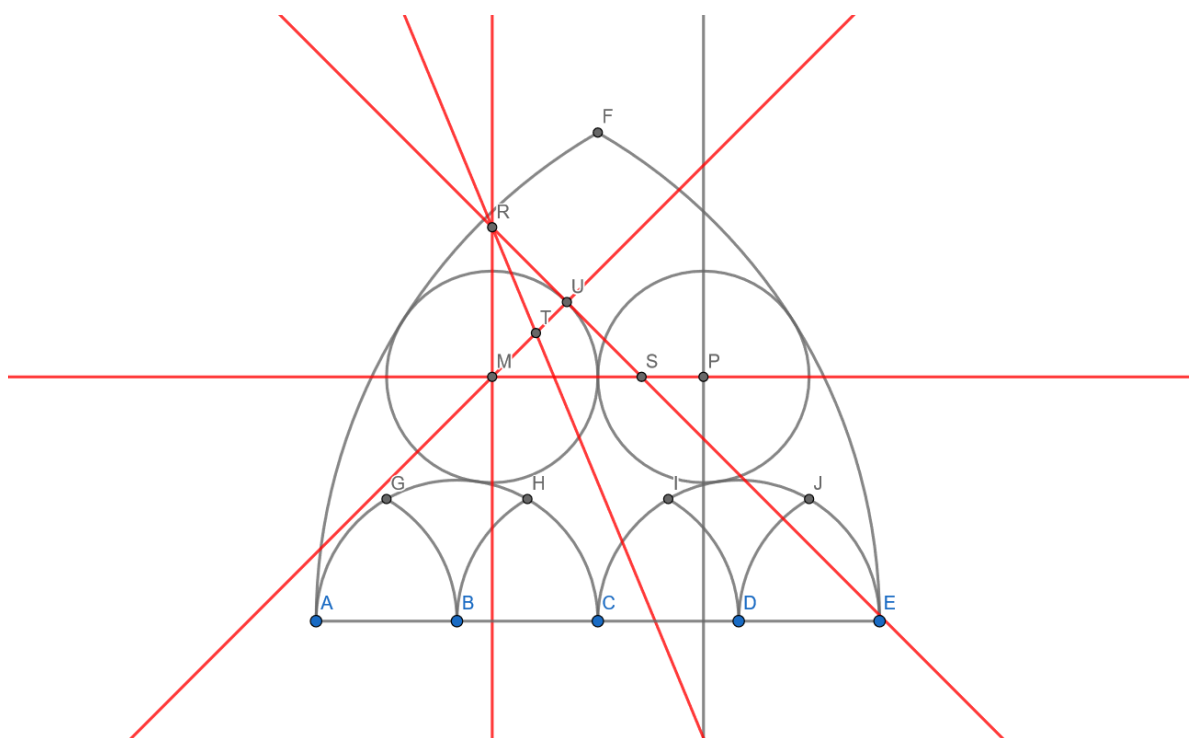
Krok 5

Następnie, rysujemy proste pomocnicze. Pierwsza z nich przechodzi przez punkty M oraz P. Dwie kolejne przechodzą odpowiednio przez punkty P oraz M i są prostopadłe do narysowanej uprzednio prostej. Dzięki temu okręgi o środkach M i P zostały odpowiednio podzielone na cztery równe części, gdzie każda ma jeden kąt prosty.



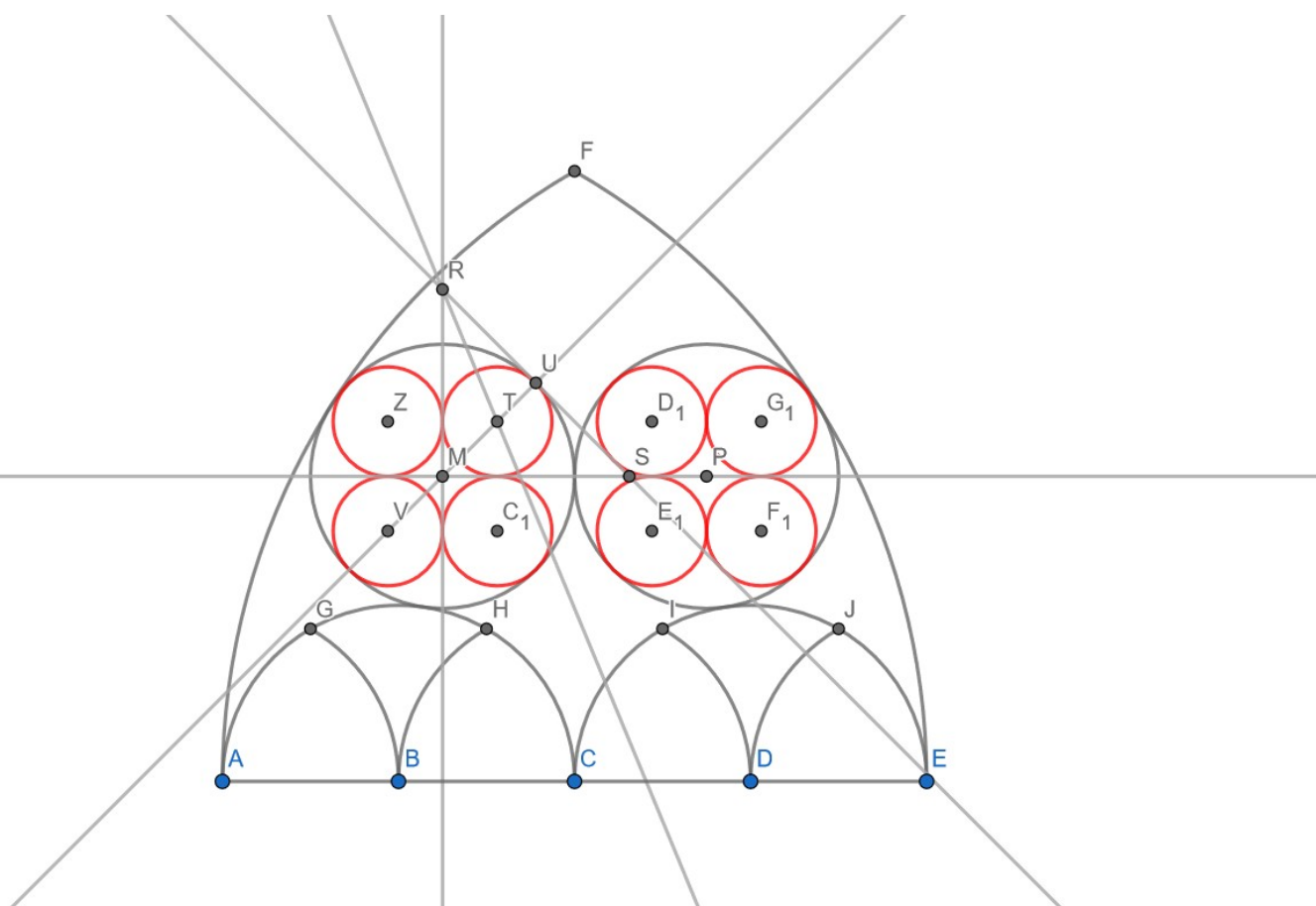
Krok 6

Po podzieleniu okręgów na części, każdy z kątów mających 90 stopni dzielimy dwusieczną kąta tak jak widzimy na rysunku. Następnie prowadzimy styczną okręgu prostopadłą do dwusiecznej. Na przecięciu się stycznej i prostych dzielących okręgi na części zaznaczamy punkty, które są wierzchołkami nowopowstałych kątów. Kąty te są równe i prowadzimy ich dwusieczne. Punkt przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta MSR będzie środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.



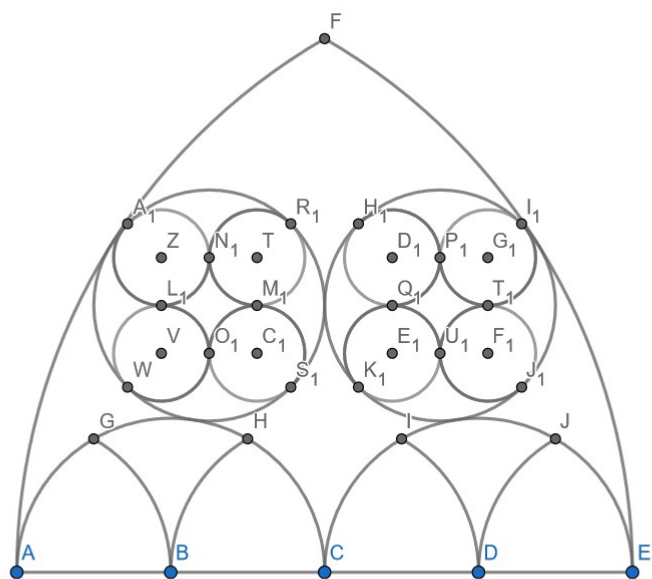
Krok 7

Rysujemy okrąg o środku T i promieniu TU. Do okręgu M, tym samym sposobem wpisujemy analogicznie 3 identyczne okręgi o środkach Z, V oraz C1. Analogicznie robimy to z okręgiem o środku



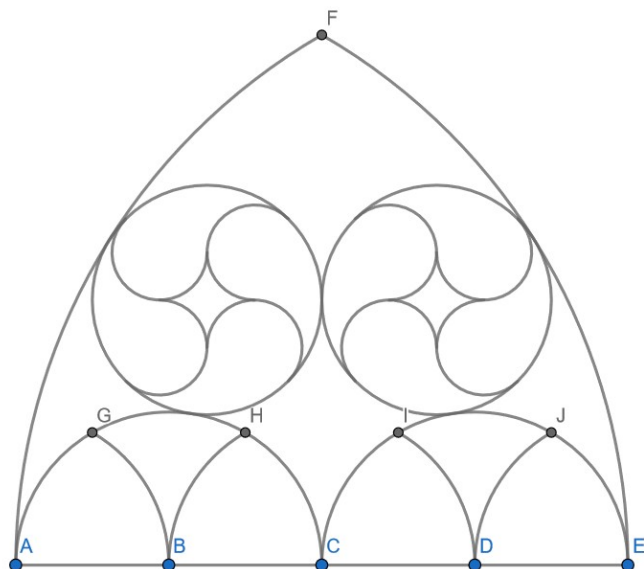
Krok 8

Następnie na okręgach o środkach Z , T , V , $C1$ zaznaczmy punkty styczności każdej pary okręgów i analogicznie powtarzamy tę czynność na okręgach o środkach $D1$, $G1$, $E1$, $F1$.



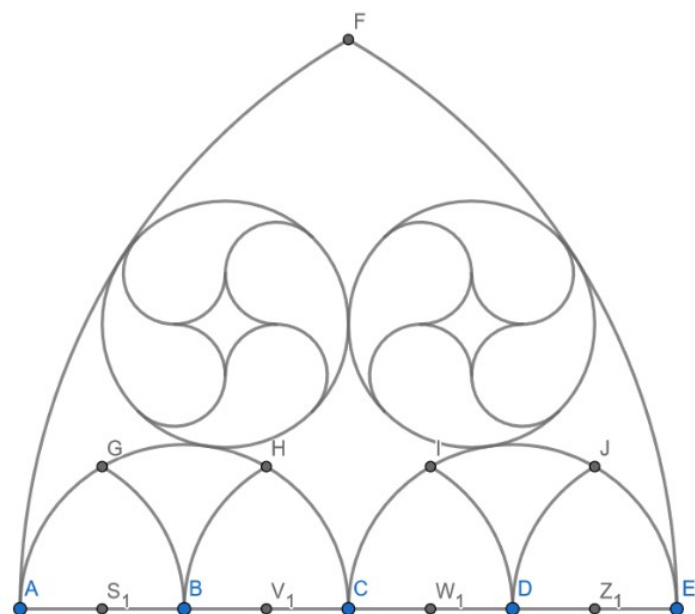
Krok 9

Później tylko oddzielamy niepotrzebne części okręgów tak, aby powstały “łezki”, które widzimy na rysunku.



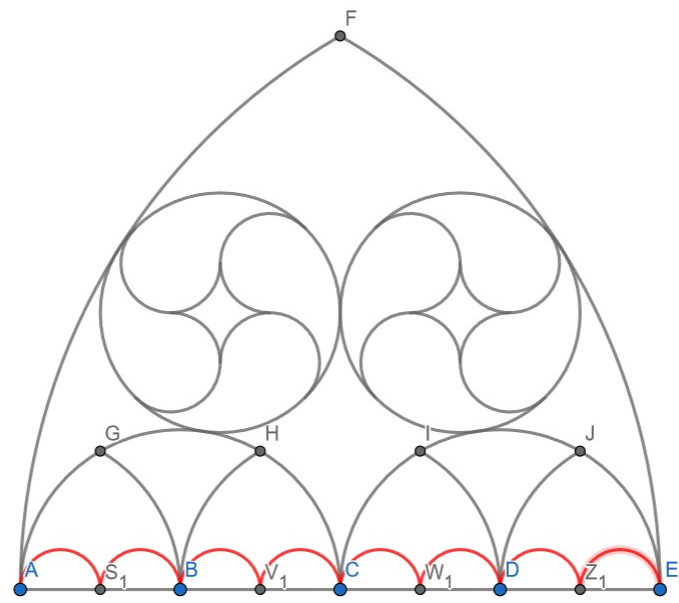
Krok 10

Teraz przechodzimy do dolnej części naszego okna. Zaznaczamy środki odcinków: AB, BC, CD i DE.



Krok 11

Następnie na nowopowstałych odcinkach rysujemy łuki, które na rysunku zostały zaznaczone czerwonym kolorem.



Krok 12

Teraz prowadzimy prostą prostopadłą do AE przez punkt S1 oraz G. długością b nazywamy odcinek AS1, a długością s nazywamy promień okręgu, który chcemy wpisać w ostrołuk ABG. Następnie z równania:

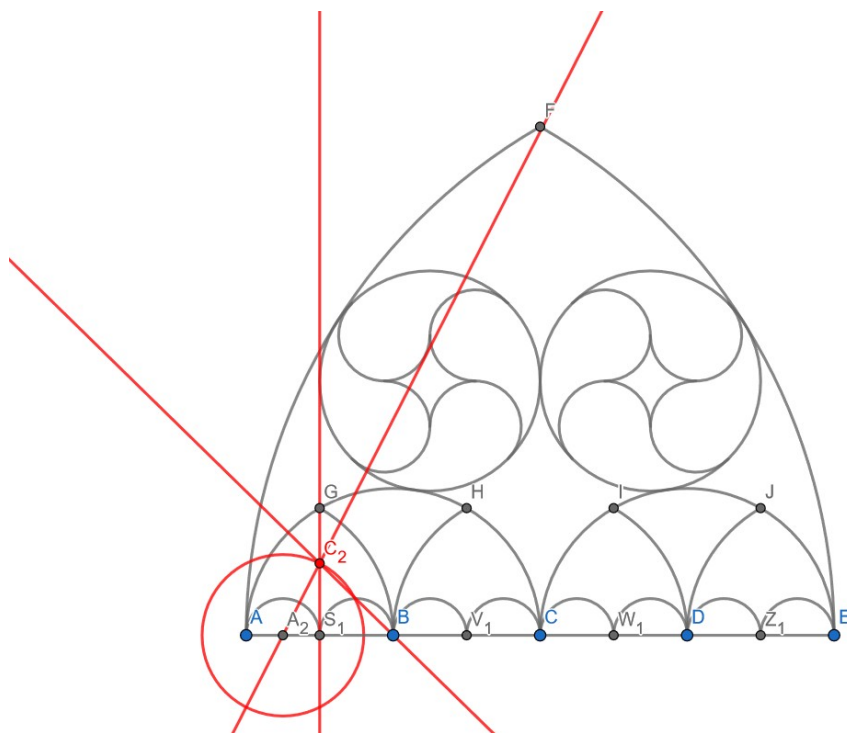
$$(b + s)^2 - b^2 = (4b - s)^2 - (2b)^2,$$

$$b^2 + 2bs + s^2 - b^2 = 16b^2 - 8bs + s^2 - 4b^2,$$

$$10bs = 12b^2,$$

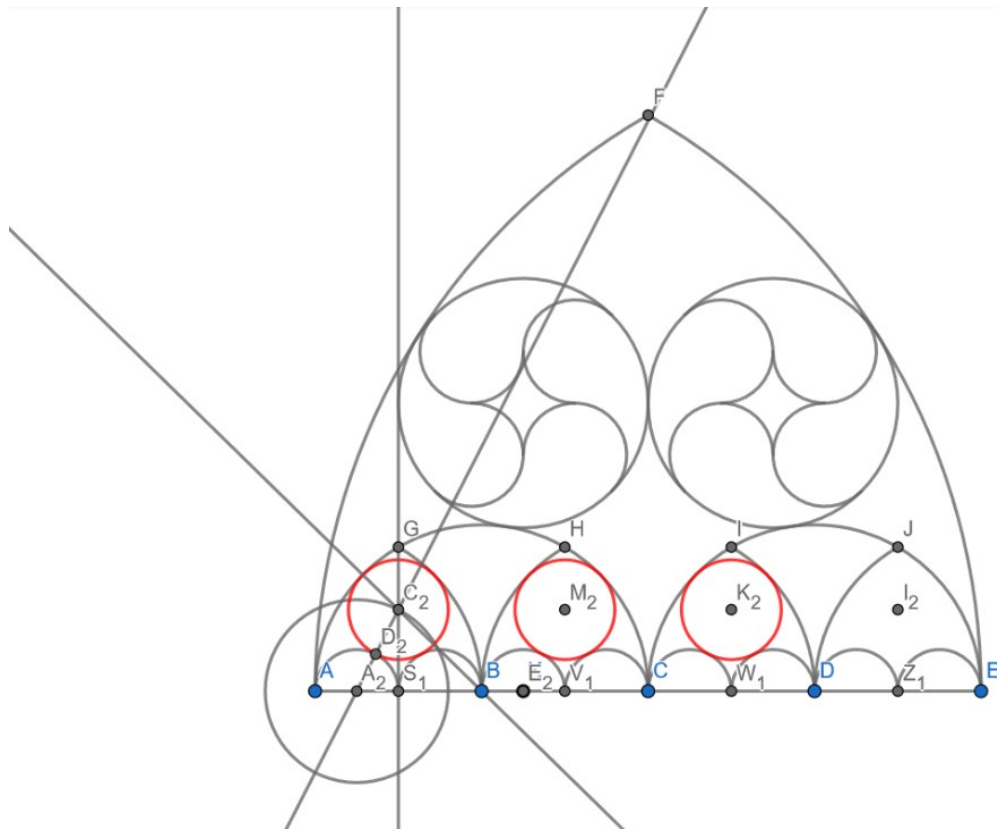
$$s = 6/5 \cdot b$$

widzimy, że s będzie równało się 6/5b, więc cyrklem zaznaczamy punkt o odległości od A2 do C2, który ma długość s+b. Na przecięciu okręgu o środku A2 i prostej przechodzącej przez S1 zaznaczamy punkt C2, który będzie środkiem okręgu o promieniu s.

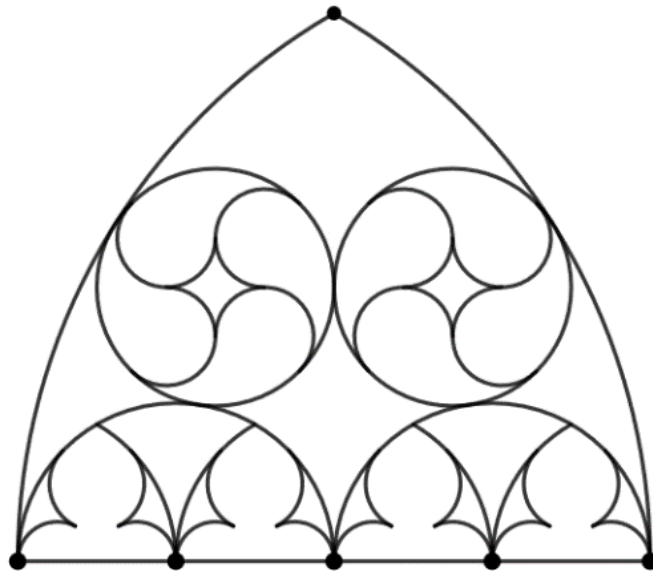


Krok 13

Tak samo wyznaczamy punkty M_2 , K_2 oraz I_2 i rysujemy okręgi o tych środkach, które są styczne do narysowanych wcześniej ostrołuków i półokręgów.



Krok 14 – Efekt Końcowy



Po usunięciu figur pomocniczych widzimy **efekt końcowy** konstrukcji naszego okna.



Dziękujemy za uwagę :)

Piotr Wojtkowski i Artur Przybylik

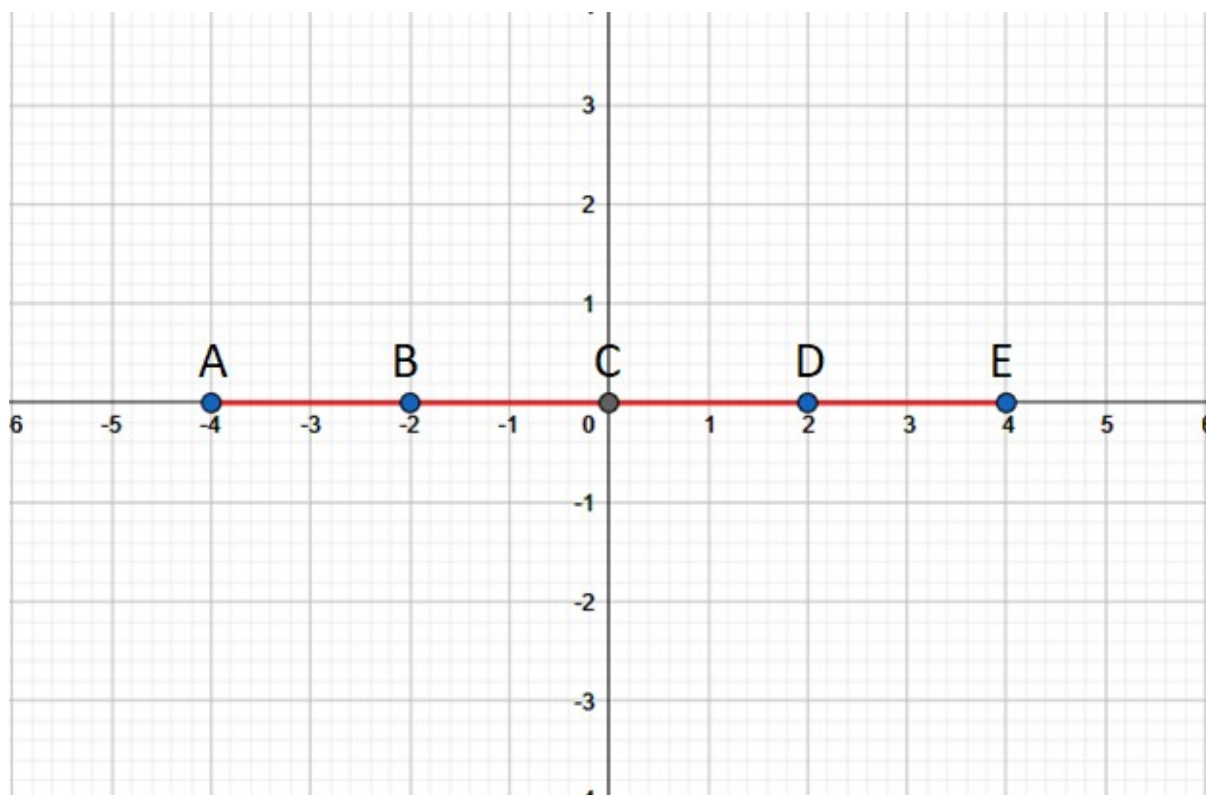
GRUPA 6





Okno pochodzi z Katedry Świętej Marii w Burgos (hiszp. *Catedral se Santa María de Burgos*). Świątynia ta znajduje się w Hiszpanii w mieście Burgos, i stoi tam już od ponad 800 lat. W 1894 została wpisana na *listę światowego dziedzictwa UNESCO*. Budowla ta jest przykładem zmian zachodzących w architekturze gotyckiej w całym okresie trwania tego stylu.

Krok 1. Wyznaczamy pięć punktów znajdujące się w równej odległości od siebie i leżące na jednej prostej oraz nazywamy je kolejno od lewej: A, B, C, D i E.



Krok 2. Tworzymy ostrołuki rysując łuki okręgów o środkach w każdym z czterech wyznaczonych punktów.

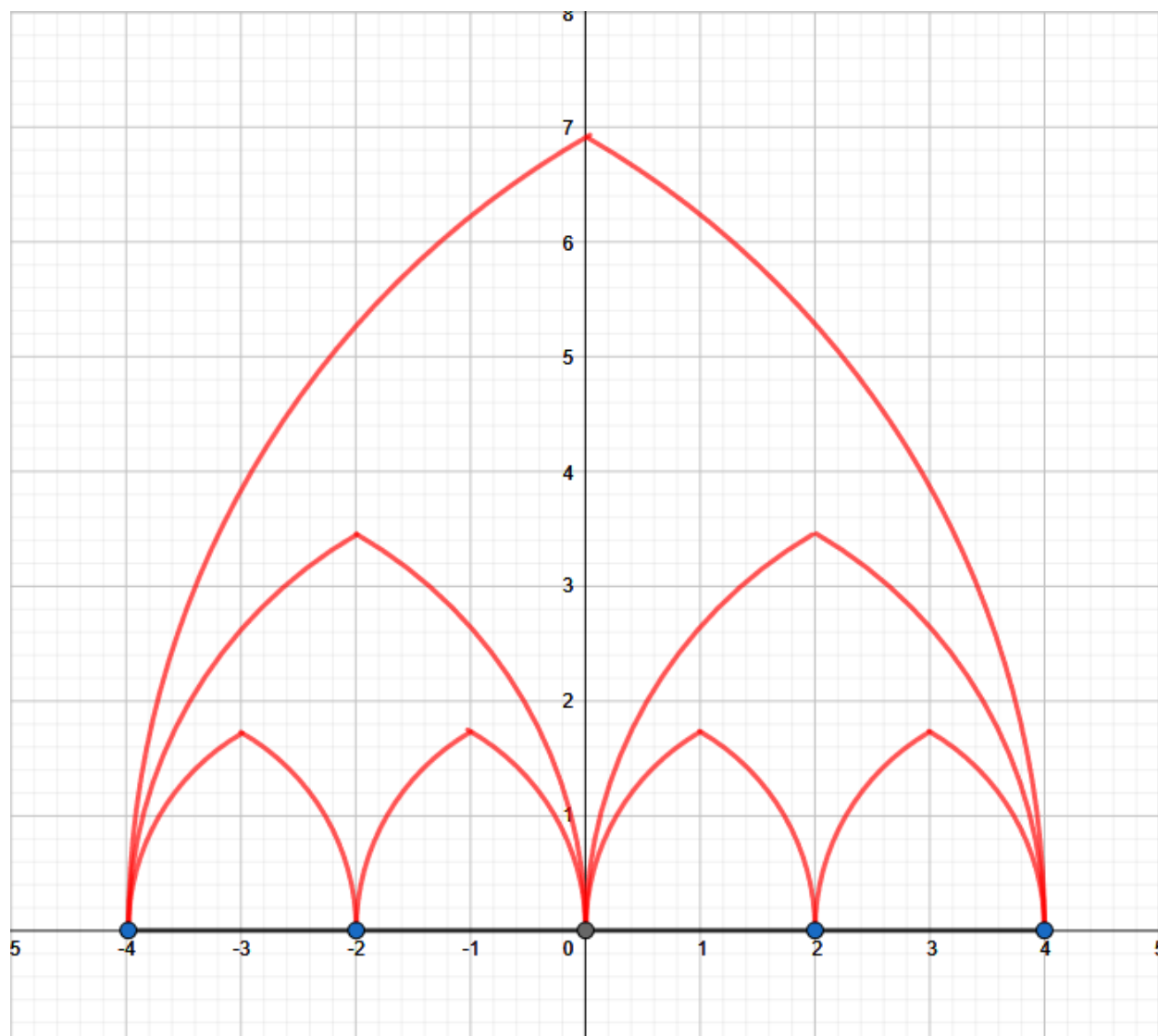
Łuki o środku w punkcie A i promieniach do punktów B, C, i E;

Łuki o środku w punkcie B i promieniach do punktów A i C;

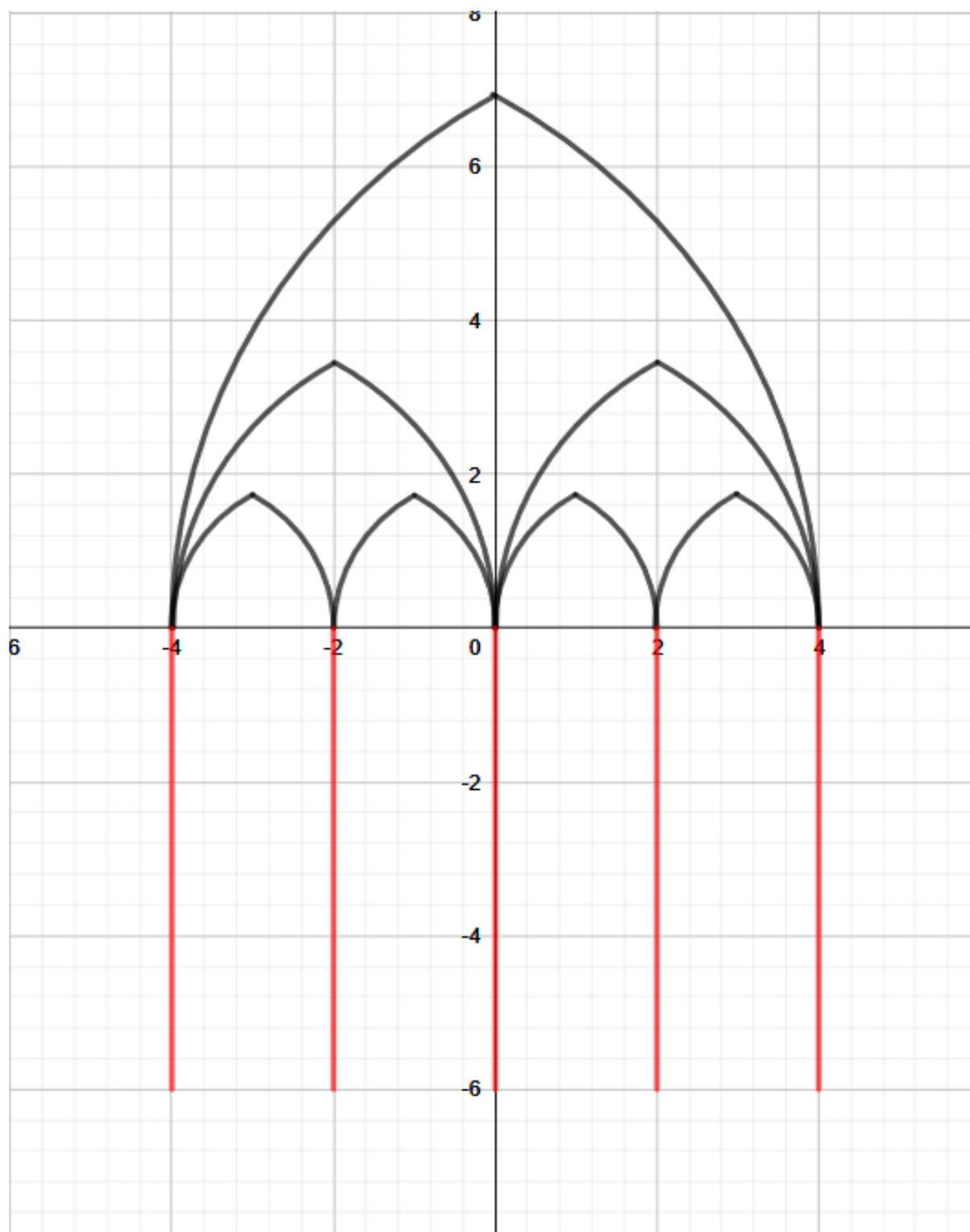
Łuki o środku w punkcie C i promieniach do punktów A, B, D i E;

Łuki o środku w punkcie D i promieniach do punktów C, i E;

Łuki o środku w punkcie E i promieniach do punktów A, C i D.

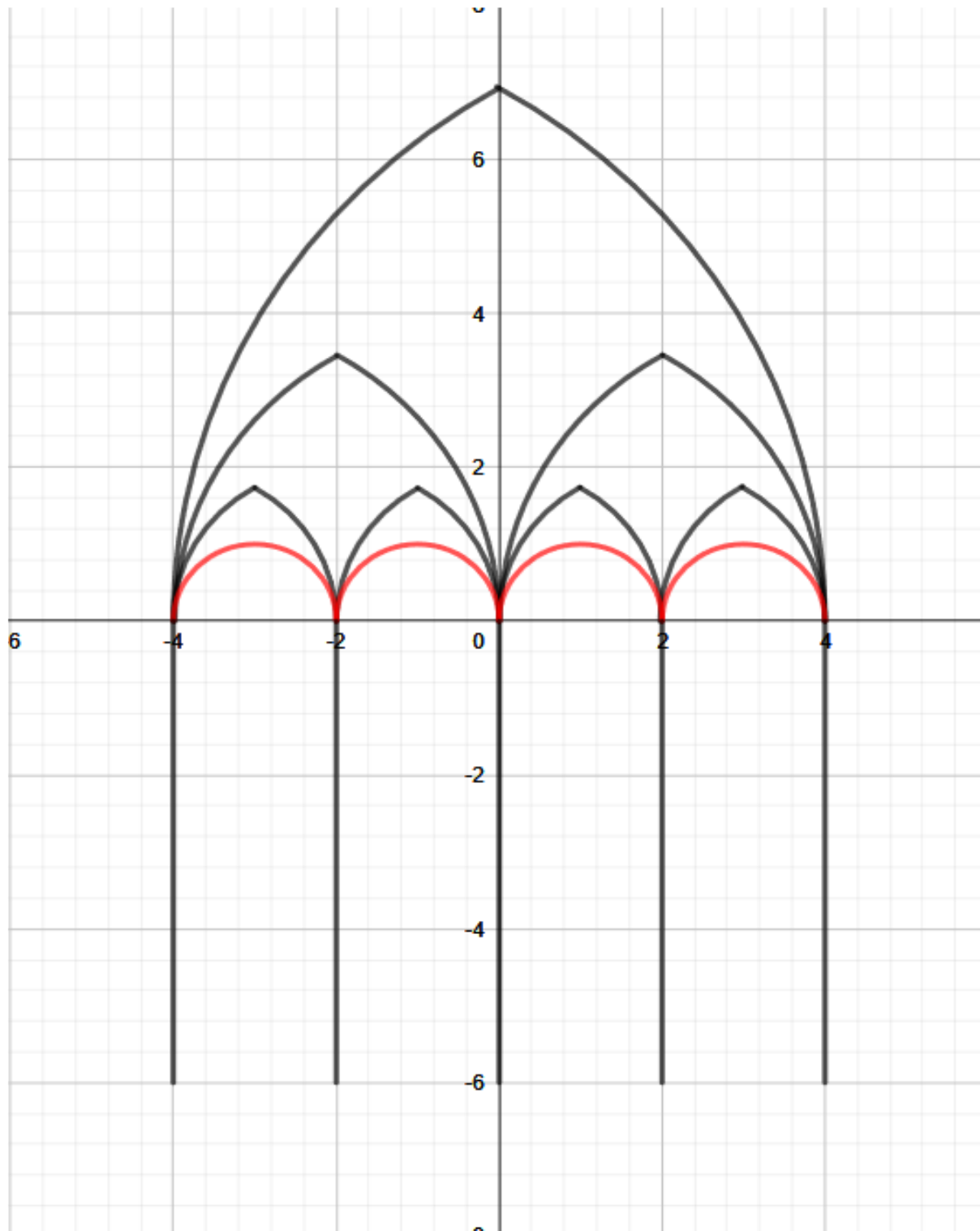


Krok 3. Wyznaczamy pięć równoległych odcinków o początkach w każdym z punktów o długości równej wysokości największego ostrołuku.



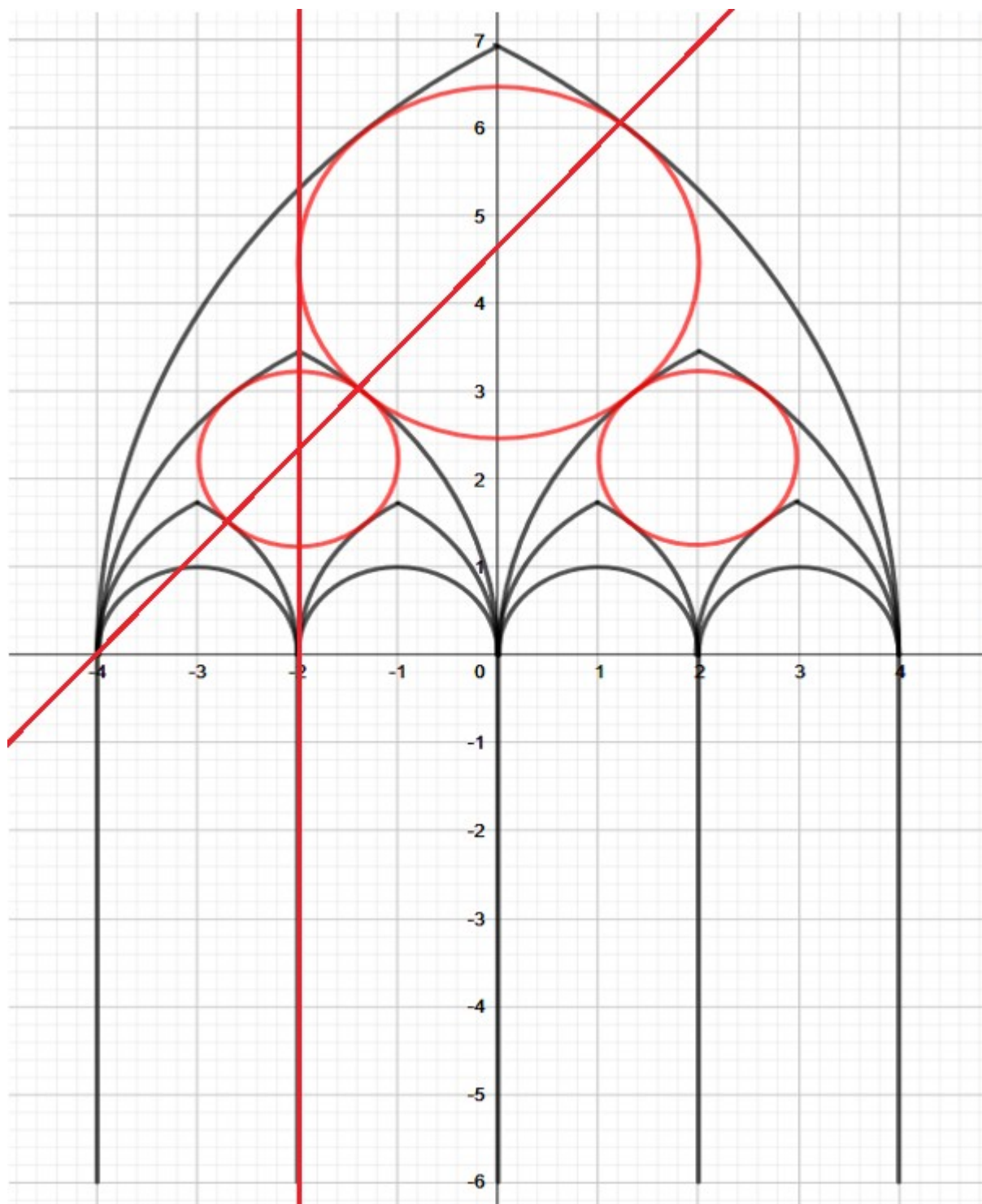
Krok 4. Dorysowujemy łuki o środkach znajdujących się po środku odpowiednich odcinków.

Krok 5.

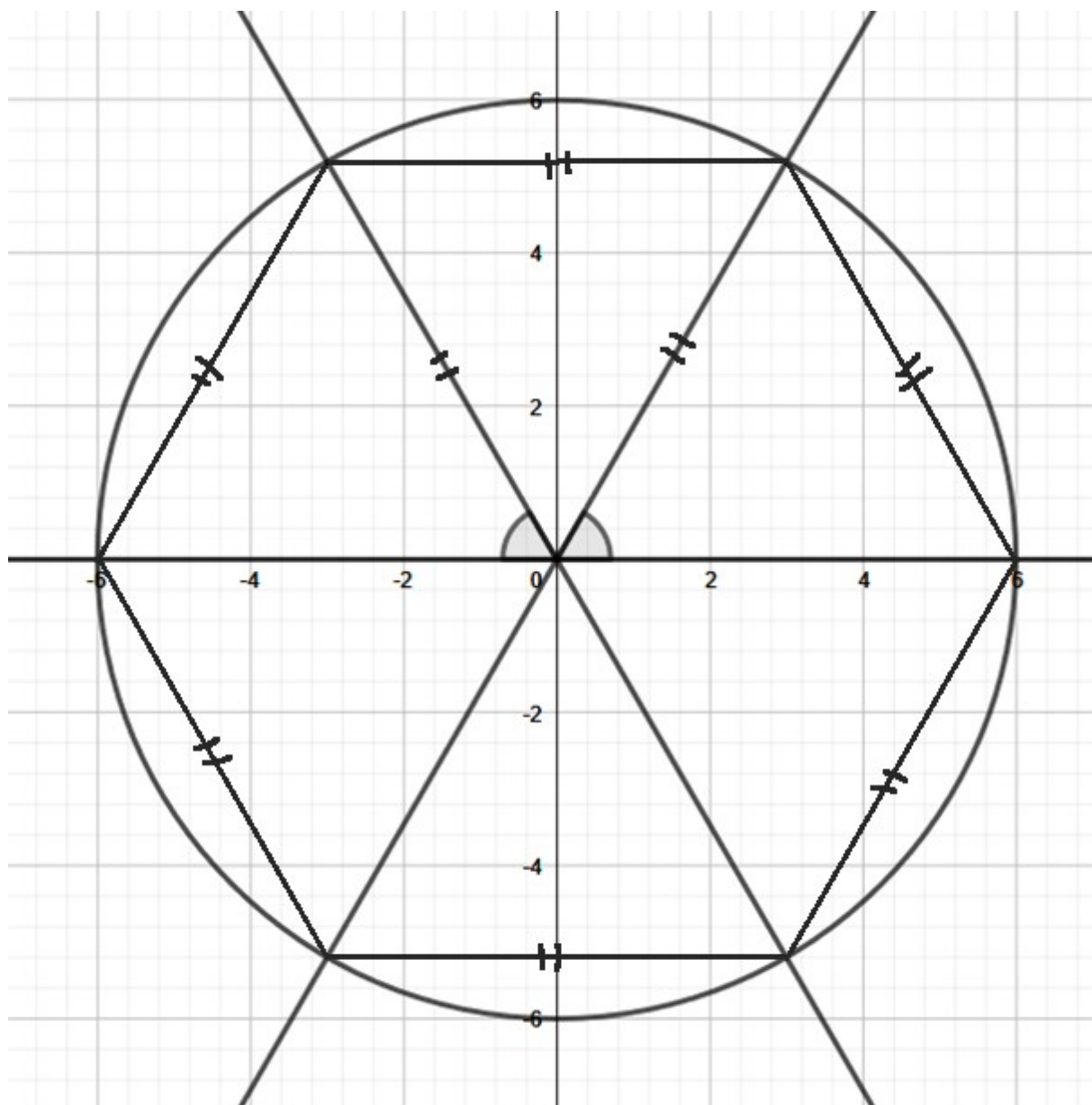


Wpisujemy okrąg w ostrołuk po lewej stronie. Rysujemy prostą prostopadłą do odcinka AE, przechodzącą przez punkt B i kolejną prostą przechodzącą przez punkt A oraz

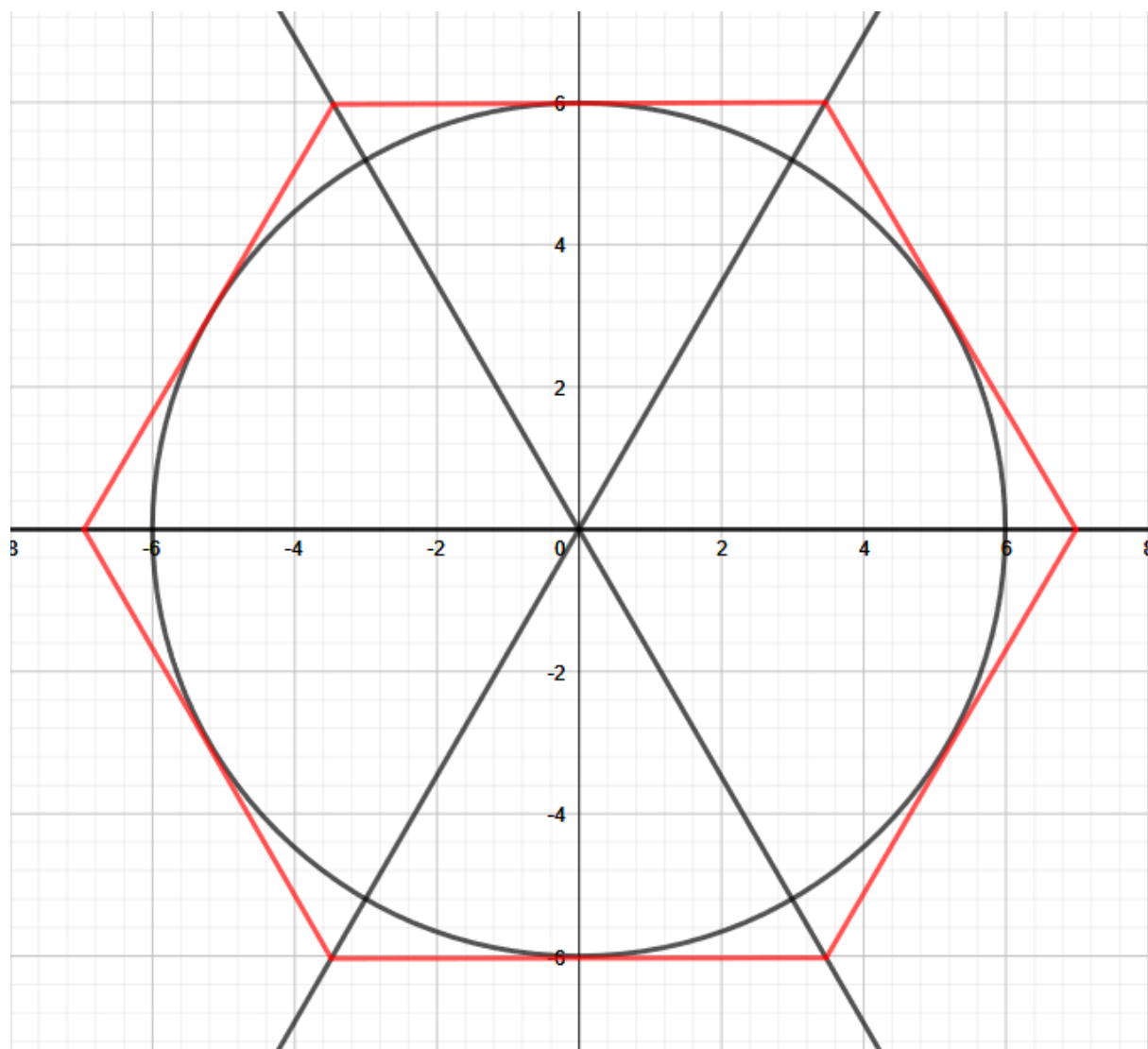
przecinającą pierwszą prostą. Wyznaczamy okrąg o środku na przecięciu obu prostych, wewnętrznie styczny do ostrołuku. Analogicznie postępujemy dla dwu pozostałych ostrołuków.



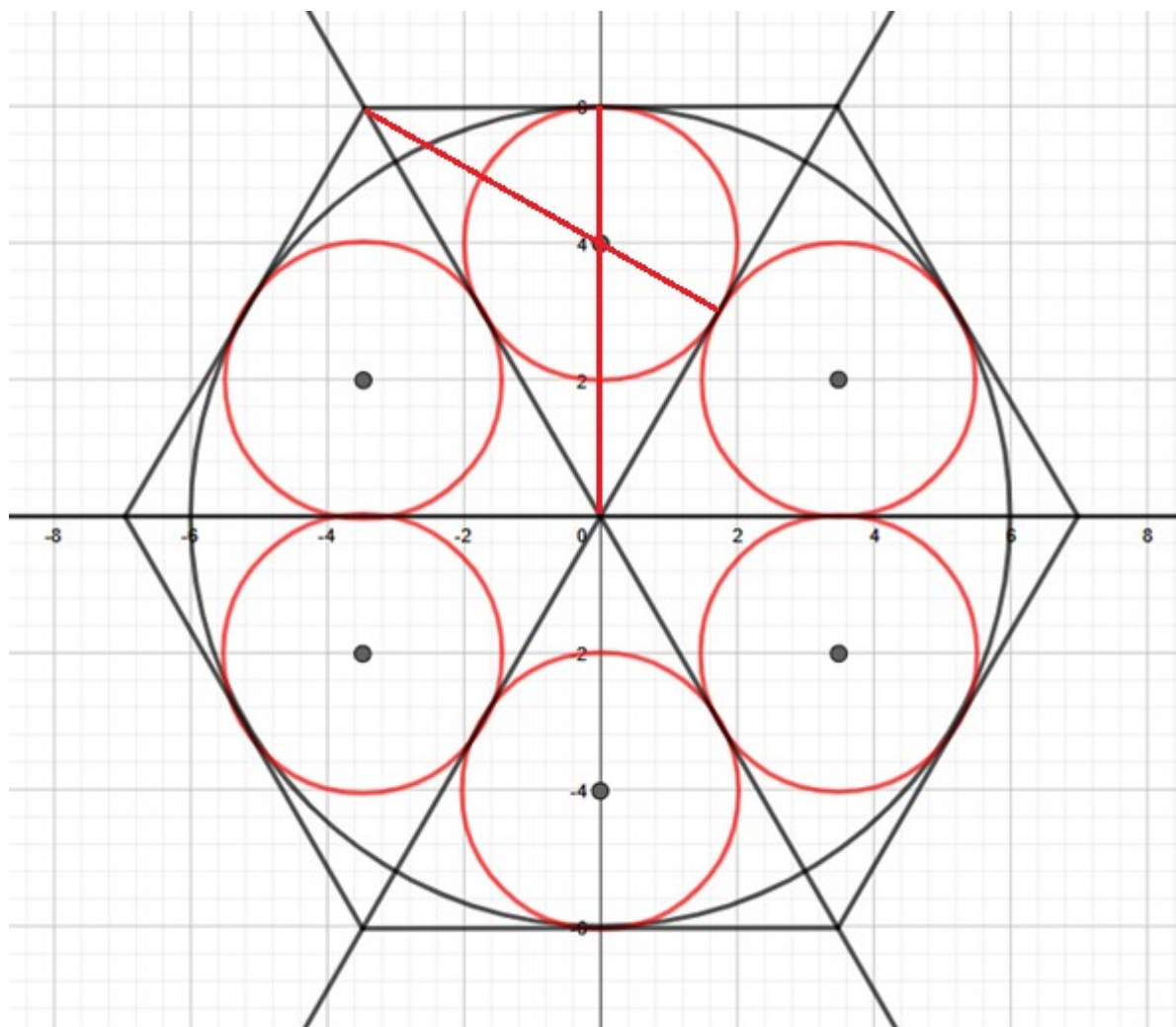
Krok 6. Tworzymy wzór znajdujący się w największym okręgu poprzez podzielenie go na sześć równych części, odkładając kolejne punkty na obrębie okręgu w odległości równej promieniowi, przy czym pozioma prosta jest równoległa do odcinka w kroku 1.



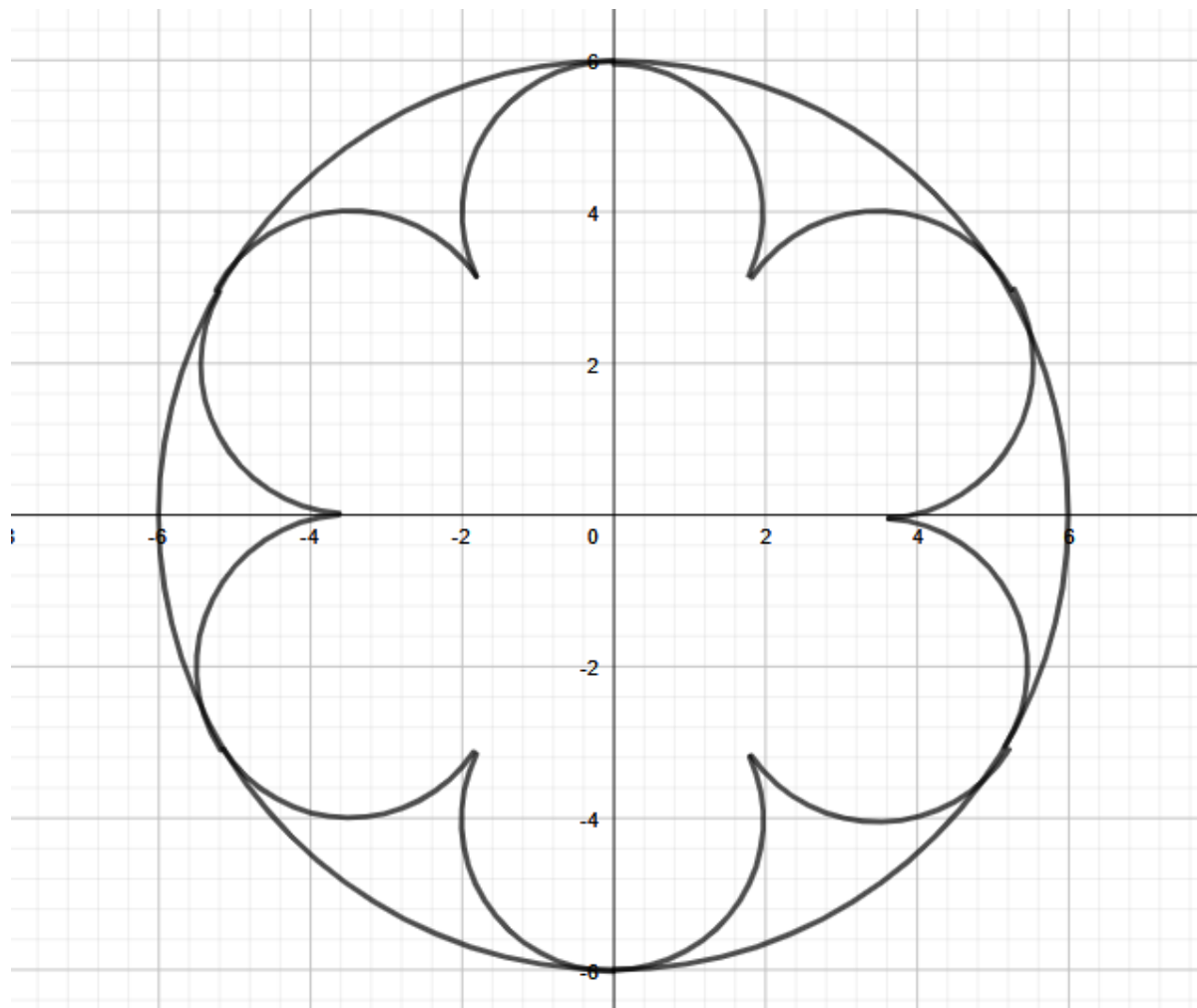
Krok 7. Opisujemy na okręgu z kroku 6. sześciokąt foremny poprzez wyznaczenie sześciu prostych stycznych do tego okręgu.



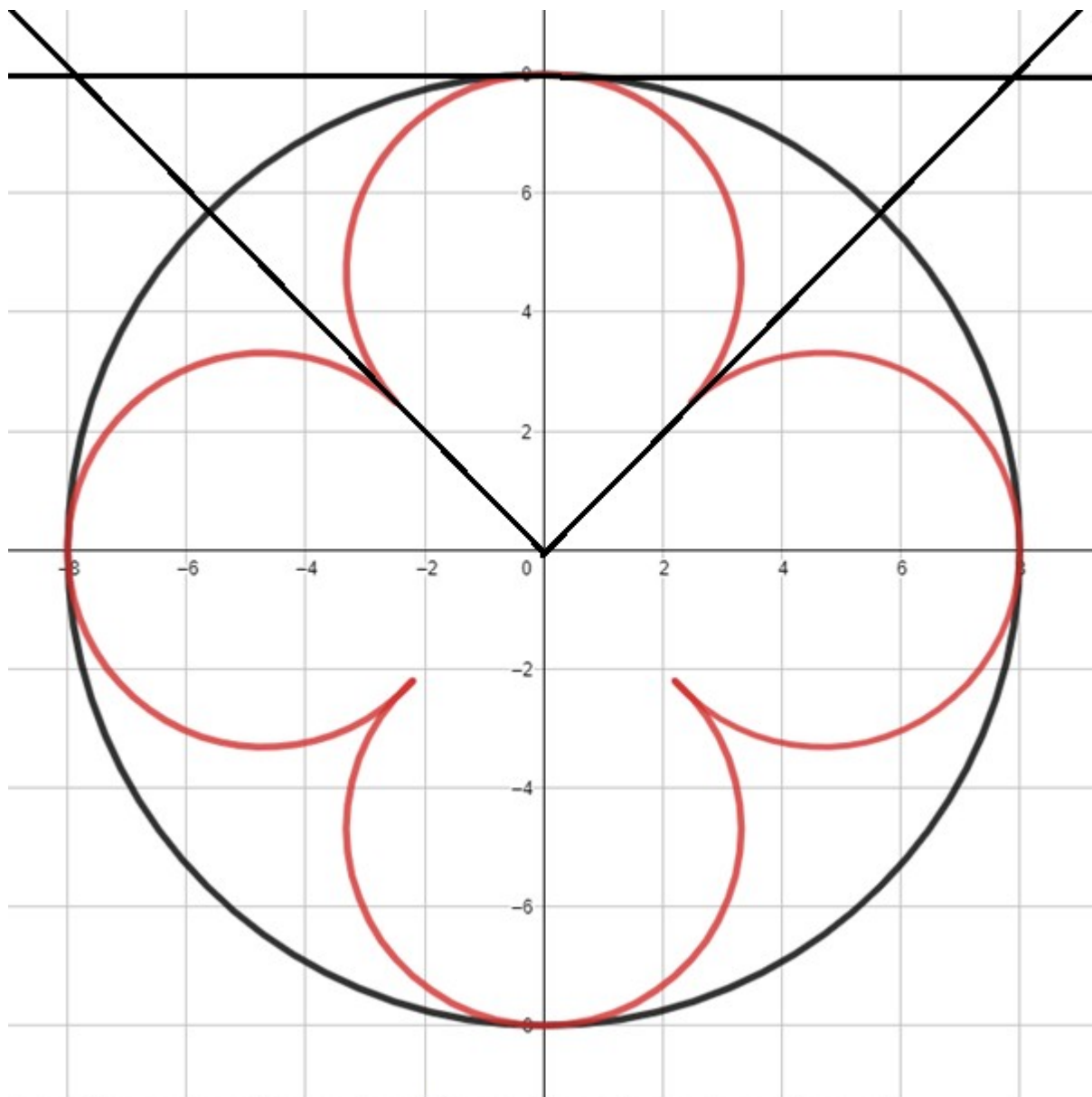
Krok 8. Wpisujemy okręgi o środkach na przecięciach symetralnych, boków trójkątów tak, aby okręgi były wewnętrznie styczne do poszczególnych trójkątów.



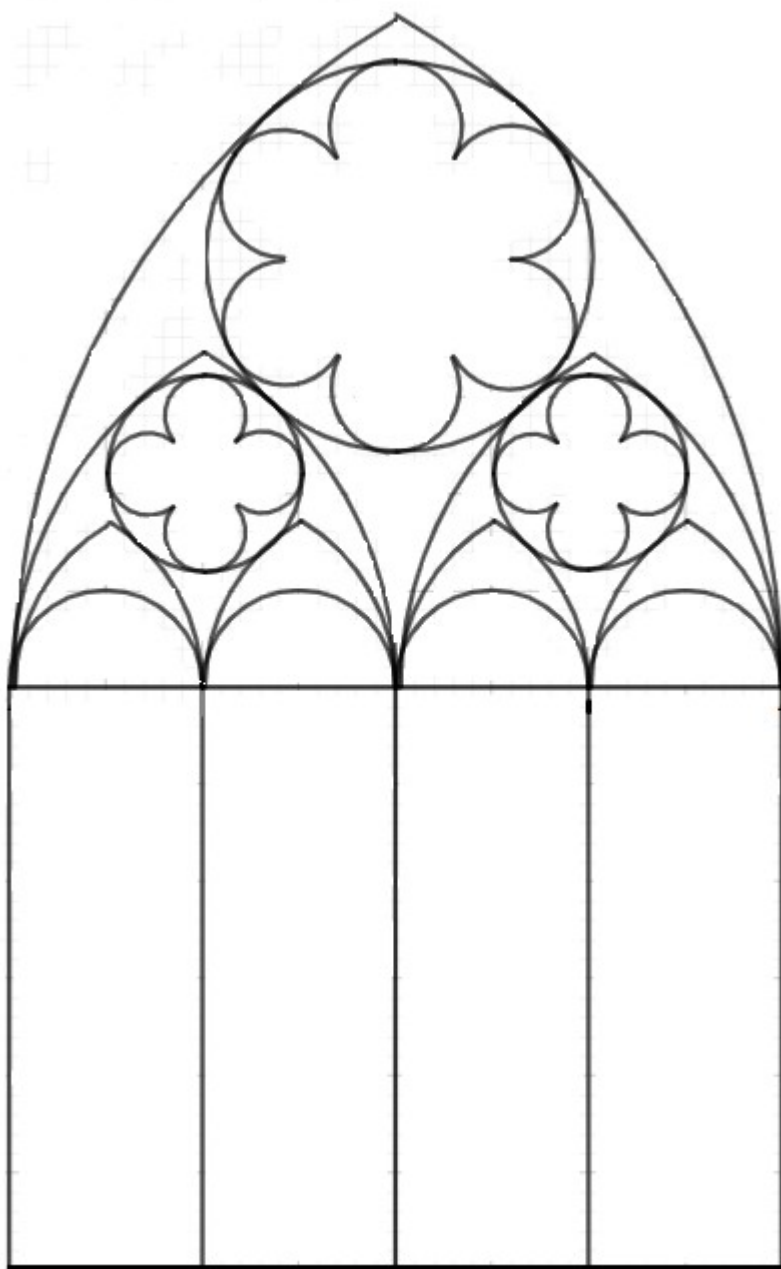
Krok 9. Na podstawie okręgów wyznaczmy wieloliść pozostawiając tylko zewnętrzne części okręgów.



Krok 10. Analogicznie tworzymy czteroliście w dwóch mniejszych okręgach konstrukcji. Dzielimy okrąg na cztery części, w każdą z nich wpisujemy trójkąt, w który wpisujemy okrąg będący podstawą każdego z czterech fragmentów czteroliścia.



Krok 11. Gotowa konstrukcja.



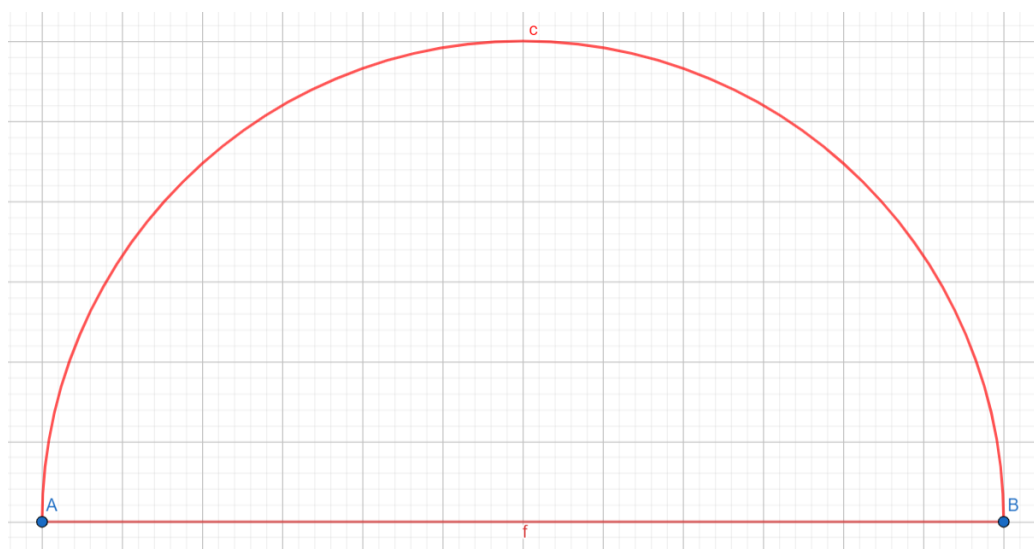
MATEMATYKA W SZTUCE GOTYKU



Zdjęcie tego okna zostało wykonane w Zamku w Malborku. Budowla była budowana i przekształcana od 1280 do połowy XV wieku.

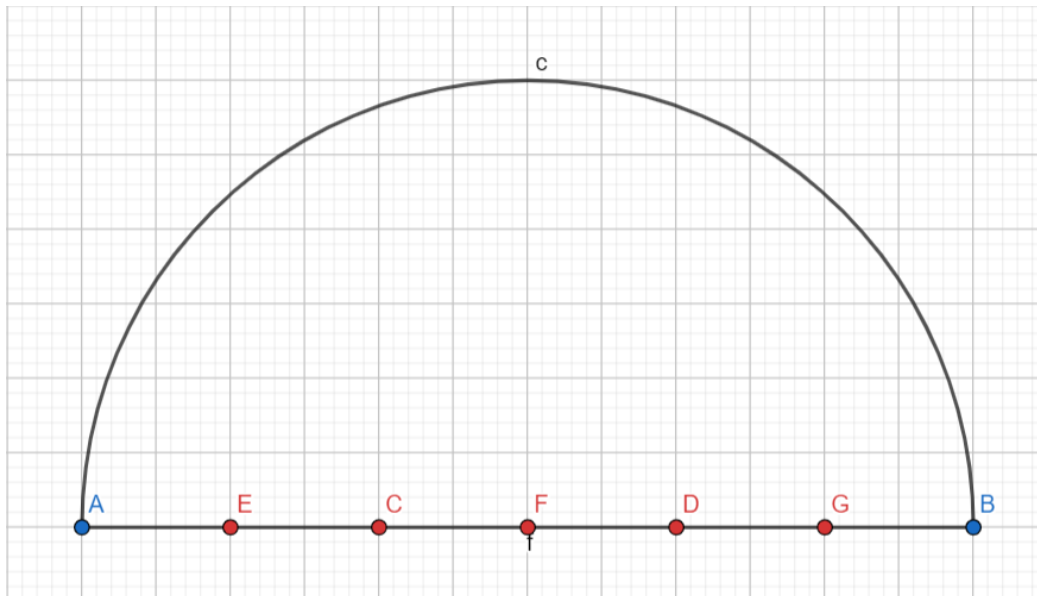
Krok 1

Wyznaczamy odcinek AB o długości $6x$ oraz rysujemy półokrąg AB o promieniu $\frac{1}{2} AB$ oraz środka w połowie AB.



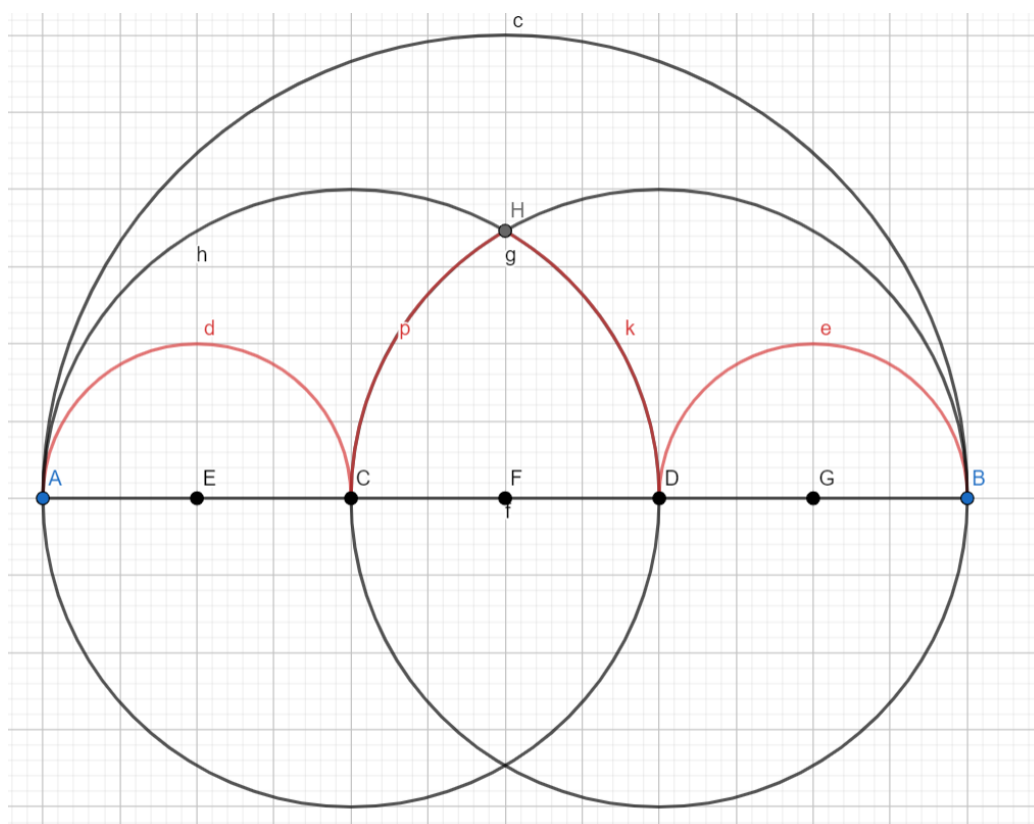
Krok 2

Wyznaczamy punkty C i D, tak że $AC=CD=DB=2x$, a następnie E, F oraz G, tak by $AE=EC=CF=FD=DG=GB=x$



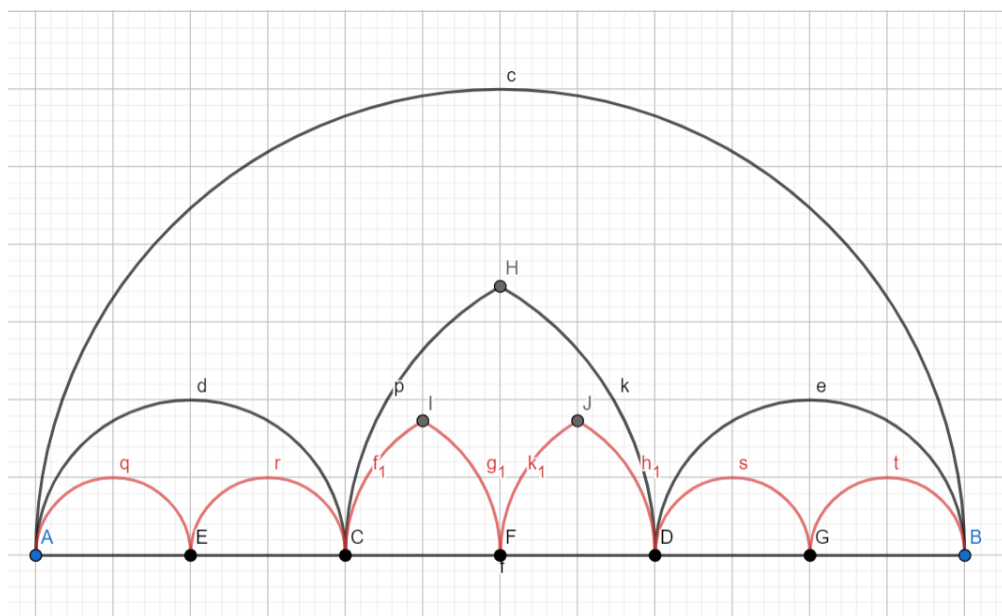
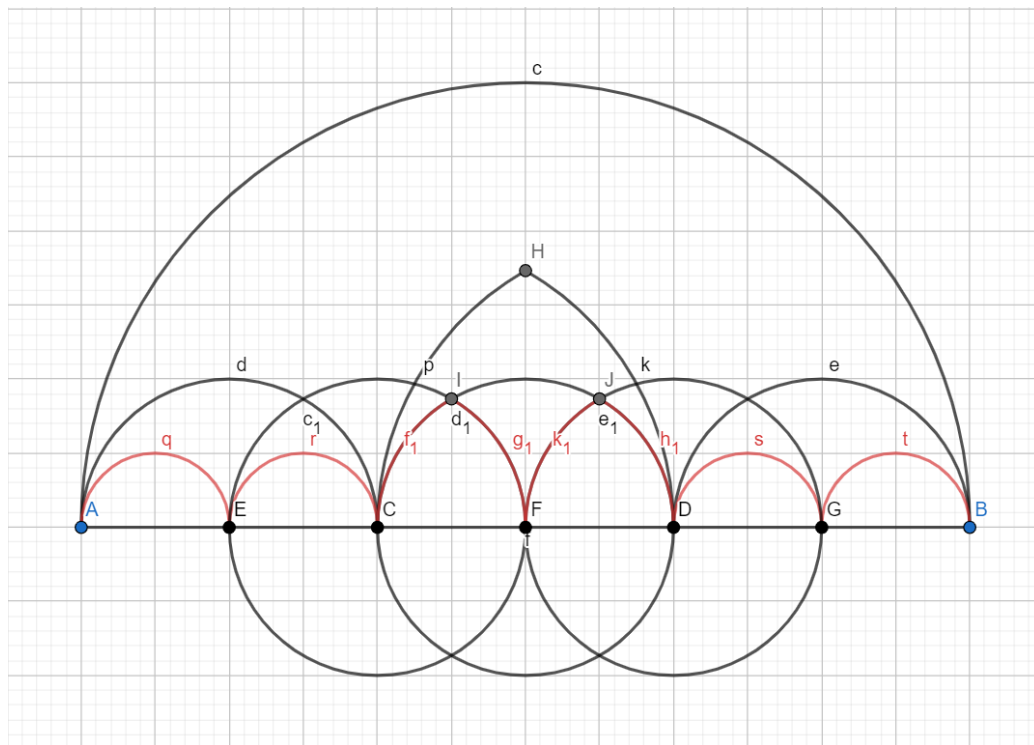
Krok 3

Rysujemy półokręgi AC i DB o środkach E i G oraz promieniach AE oraz ostrołuk CD. Ostrołuk CD rysujemy poprzez wyznaczenie okręgu o promieniu AC i środku C oraz o promieniu BD i środku D, a następnie wyznaczeniu punktu ich przecięcia który nazywamy H. Następne ostrołuki będziemy wykonywać w podobny sposób.



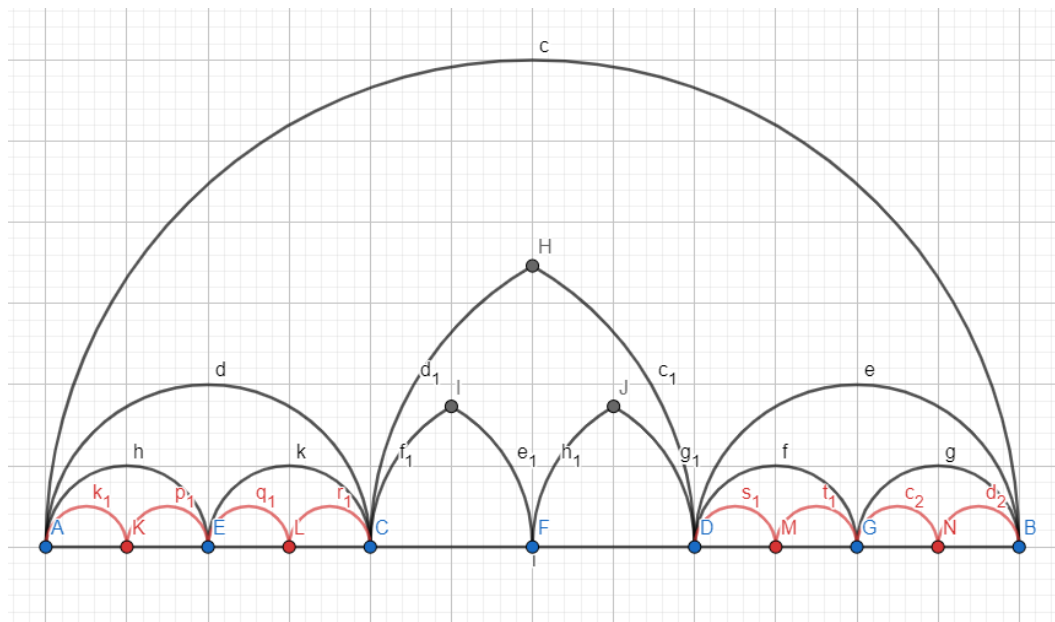
Krok 4

Rysujemy półokręgi AE, EC, DG i GB o środkach odpowiednio w połowach odcinków AE, EC, DG, GB i promieniach $\frac{1}{2}$ AE oraz ostrołuki o podstawie CF i FD



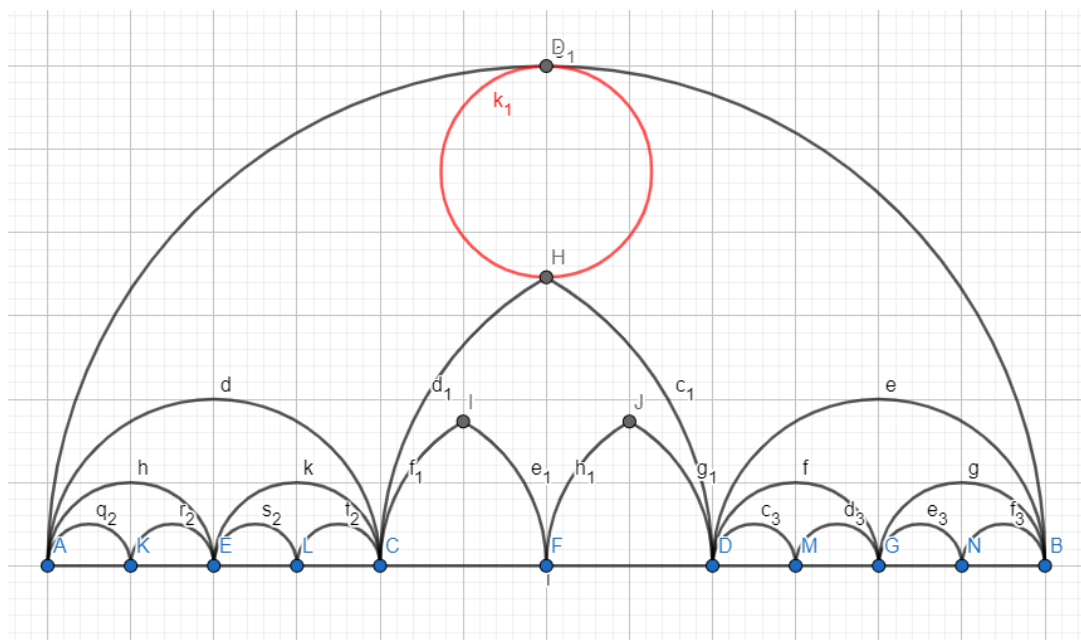
Krok 5

Wyznaczamy punkty K, L, M, N, tak, że $AK=KE=EL=LC=DM=MG=GN=NB$ oraz półokręgi AK, KE, EL, LC, DM, MG, GN, NB odpowiednio o środkach na środkach odcinków AK, KE, EL, LC, DM, MC, CN, NB i promieniach $\frac{1}{2} AK$.



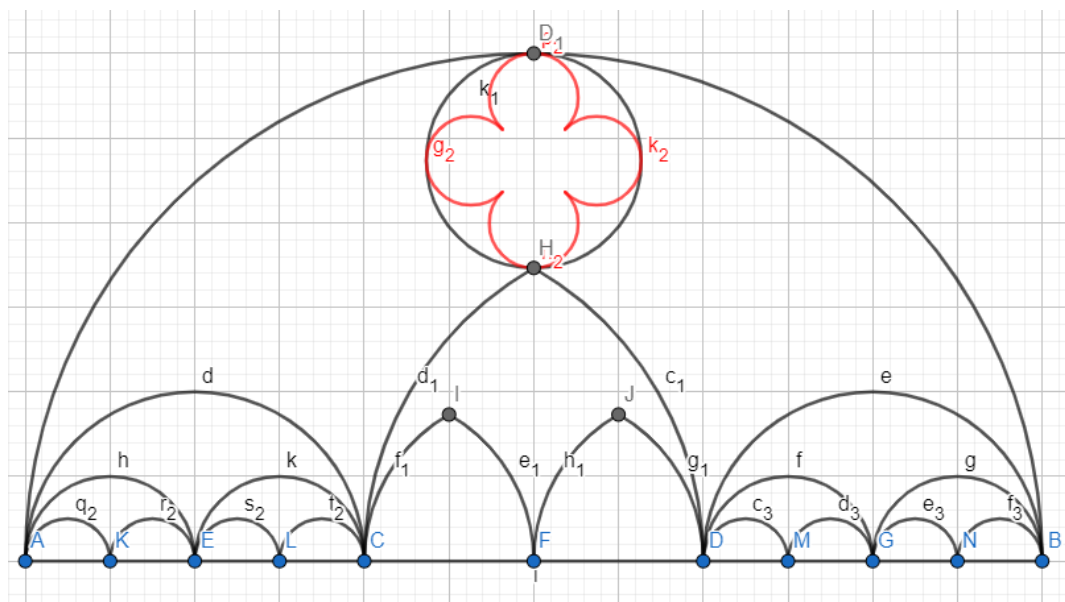
Krok 6

Rysujemy okrąg o środku na środku odcinka HD_1 i promieniu $\frac{1}{2} HD_1$.

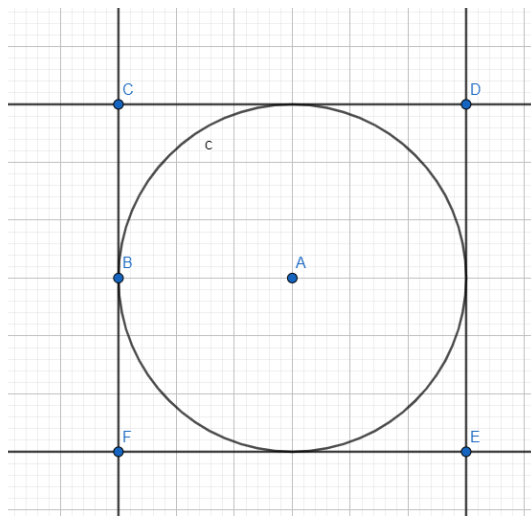


Krok 7

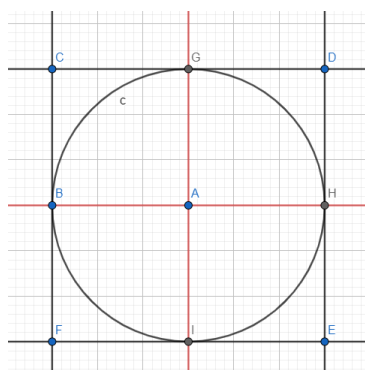
Rysujemy czteroliściu w okręgu o średnicy HD_1



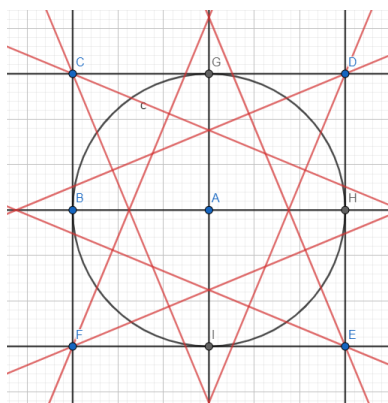
czteroliść powstaje poprzez:



1. Wpisanie okręgu w kwadrat
2. Wyznaczenie prostej prostopadłej do CF i DE przechodzącej przez środek okręgu(A).
3. Wyznaczenie prostej prostopadłej do CD i FE przechodzącej przez środek okręgu(A).

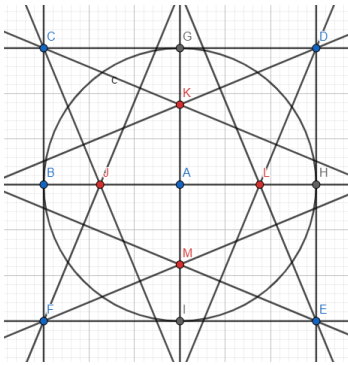


4. Wyznaczanie dwusiecznych kąta CFA oraz kąta FCA. Analogicznie dla kątów: CDA, DCA,

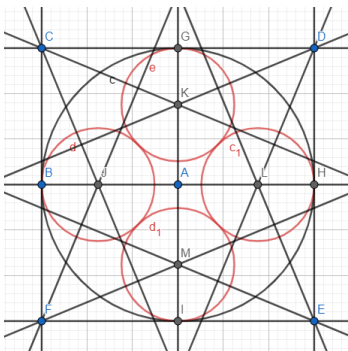


DEA, EDA, FEA, EFA

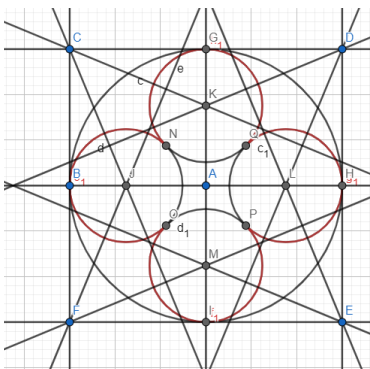
5. Wyznaczenie punktów na przecięciu dwusiecznych z tego samego trójkąta (CFA, DCA, EDA, FEA)



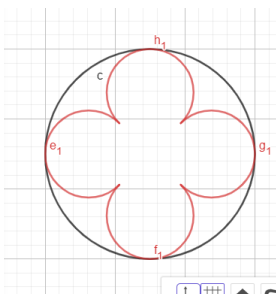
6. Wyznaczamy okręgi o promieniu BJ, IM, HL, GK



7. Następnie wyznaczamy łuki od punktu przecięcia okręgu 'd' z 'e' do punktu przecięcia 'd' z 'd₁', czyli od N do O. Analogicznie z innymi okręgami.

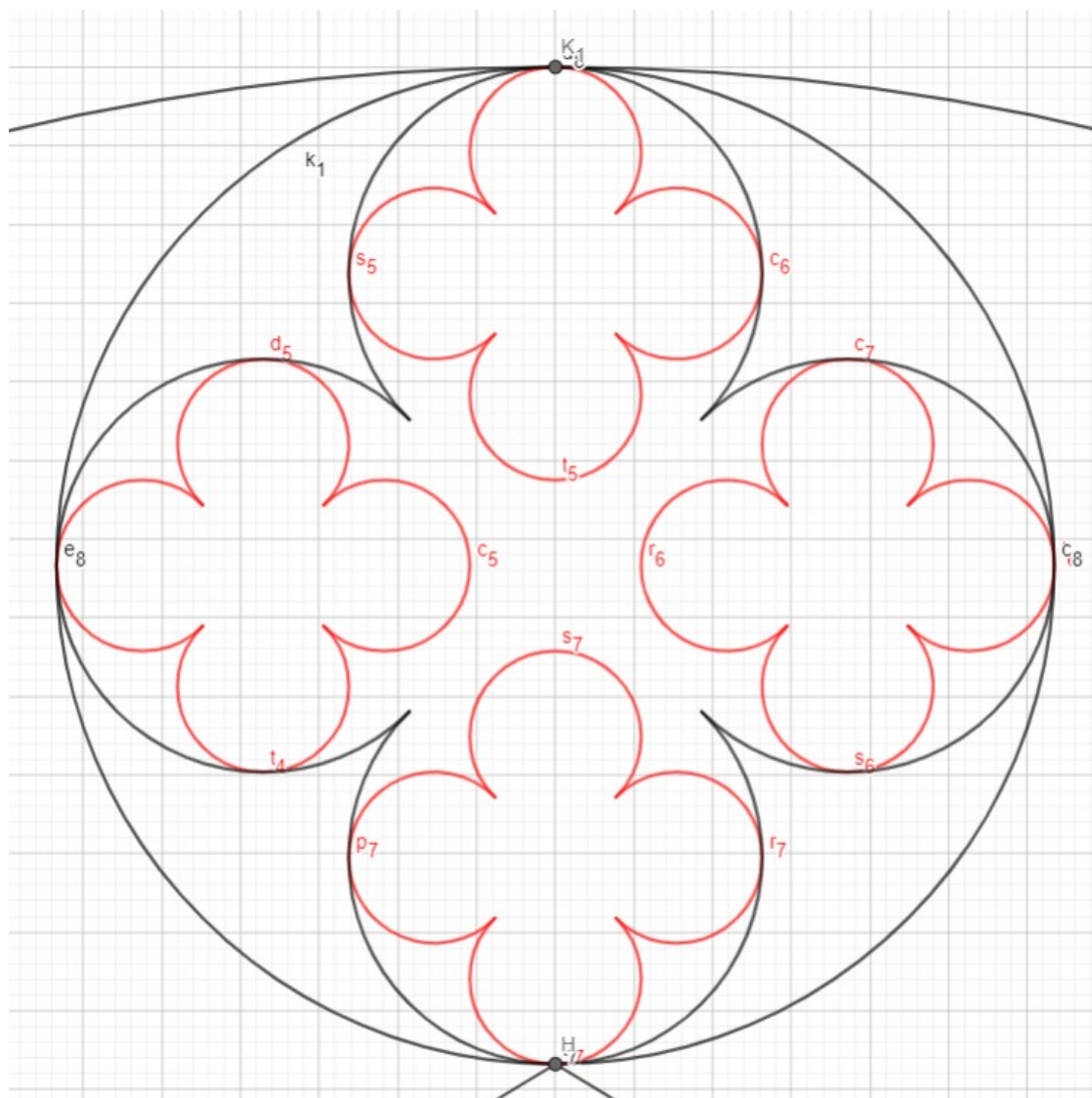


8. Usuwamy linie pomocnicze



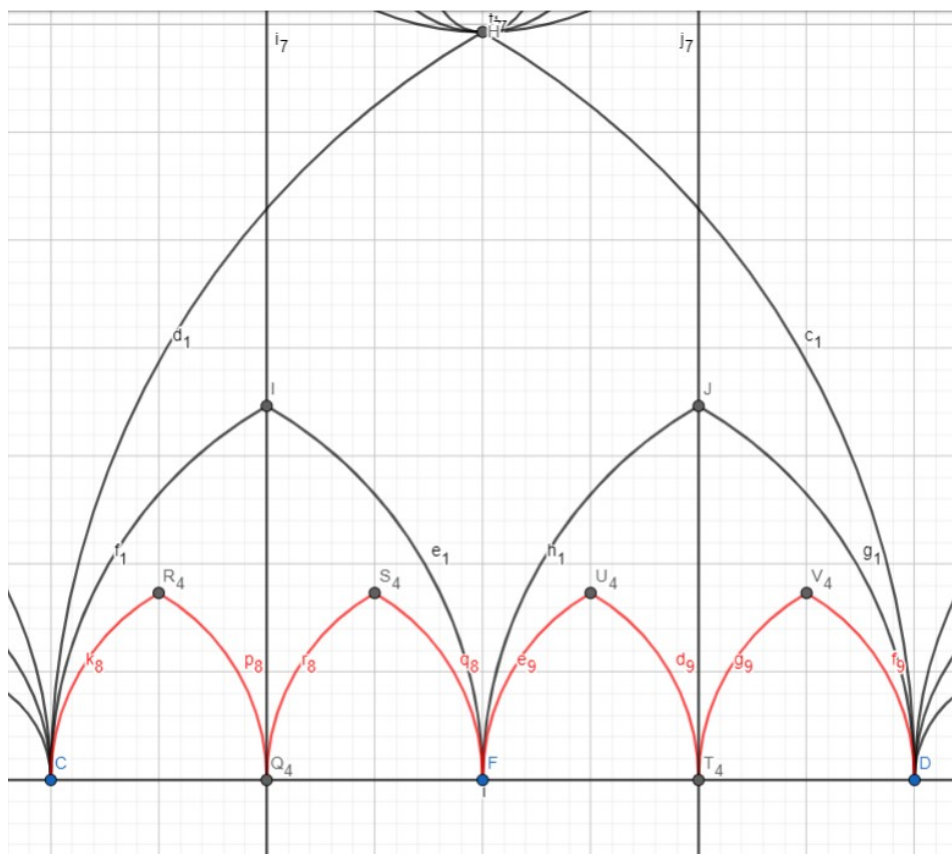
Krok 8

Rysujemy czteroliść w każdym 'liściu' koniczynki w okręgu o średnicy HD_1



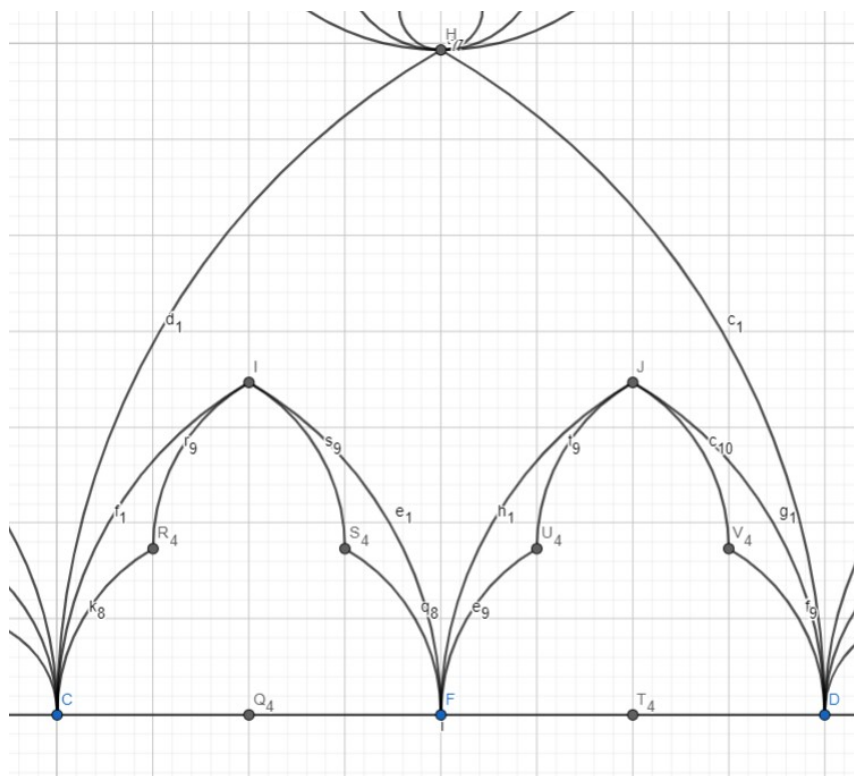
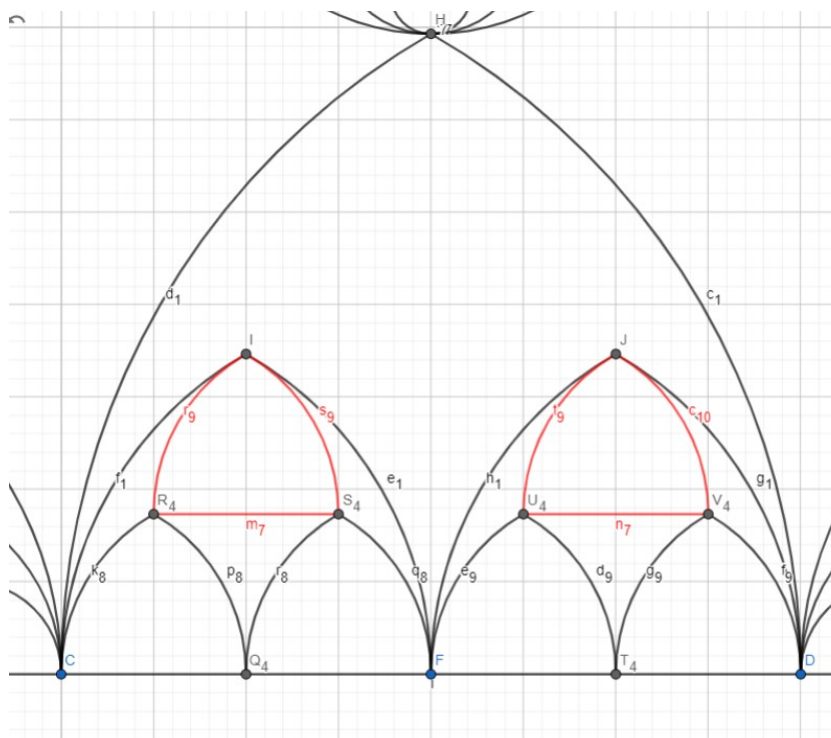
Krok 9

W ostrołuku CDH CF i FD dzielimy tak, że $CQ_4 = Q_4F = FT_4 = T_4D = \frac{1}{2}x$. Rysujemy ostrołuki R_4CQ_4 , Q_4S_4F , FU_4T_4 , T_4V_4D .



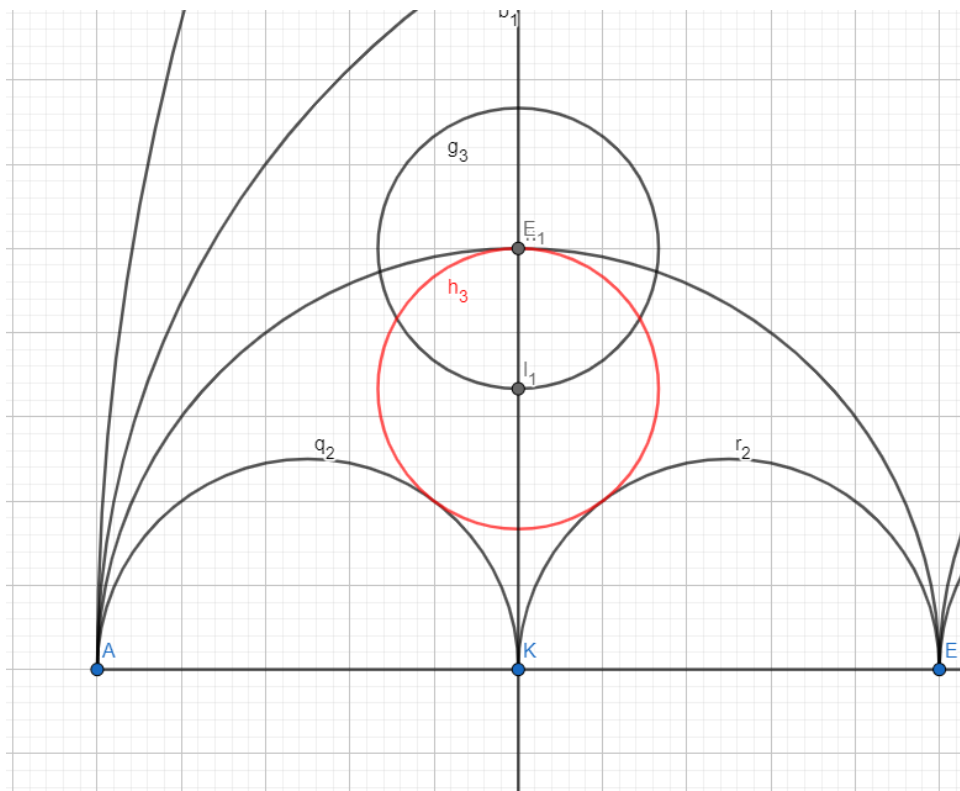
Krok 10

Rysujemy odcinki R_4S_4 i U_4V_4 , po czym ostrołuki IR_4S_4 , IU_4V_4 .

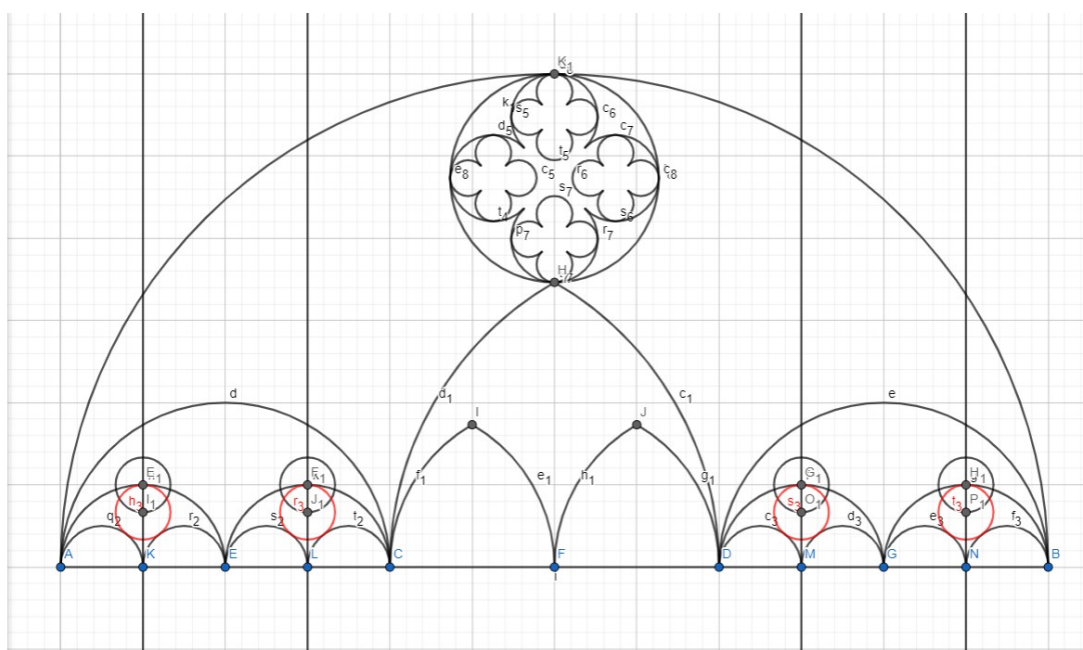


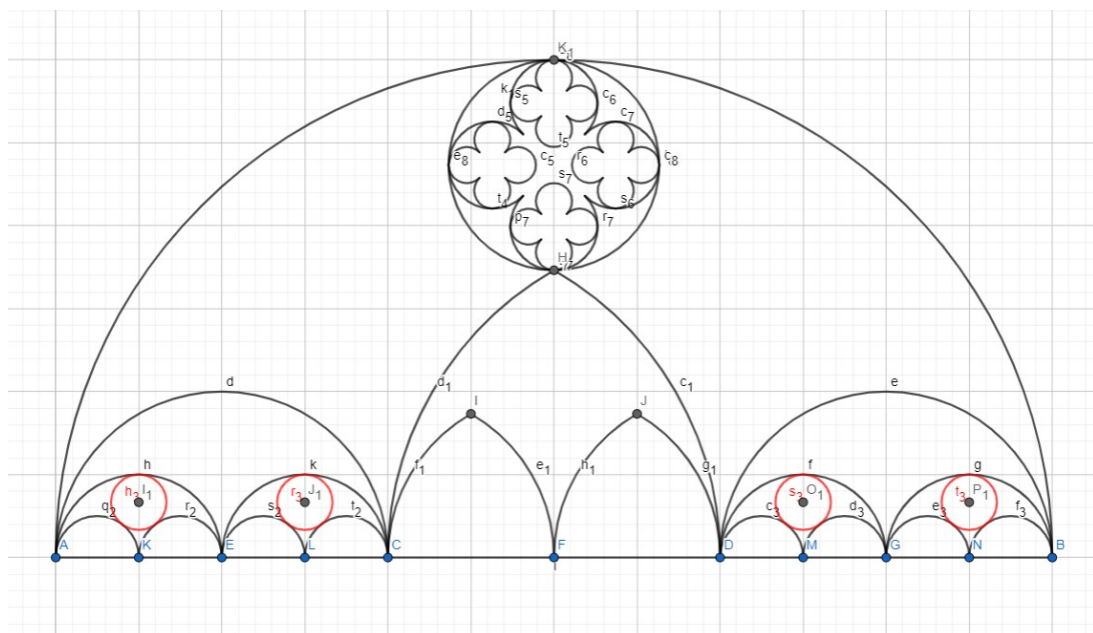
Krok 11

Na odcinku E_1K wyznaczamy punkt I_1 taki, że $E_1I_1 = 1/3 \cdot AK$, następnie rysujemy okrąg o środku I_1 i promieniu $1/3 \cdot AK$



Robimy to analogicznie dla półokręgów EC , DG , GB





Mnożymy AK przez $\frac{1}{3}$ ponieważ promień okręgu o środku G jest równy $\frac{1}{3} AC$,
ponieważ:

Oznaczmy AE jako a, oraz promień okręgu o środku G jako r.

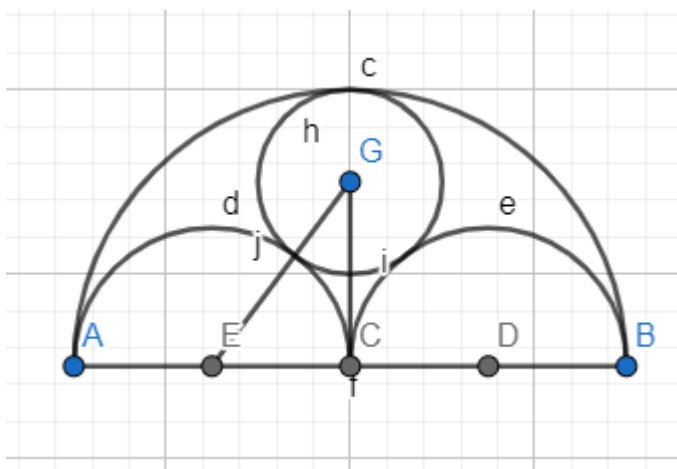
$$a^2 + (2a-r)^2 = (a+r)^2,$$

$$a^2 + 4a^2 - 4ar + r^2 = a^2 + 2ar + r^2,$$

$$6ar = 4a^2,$$

$$r = \frac{2}{3} * a$$

$$R = \frac{1}{3} * AC$$



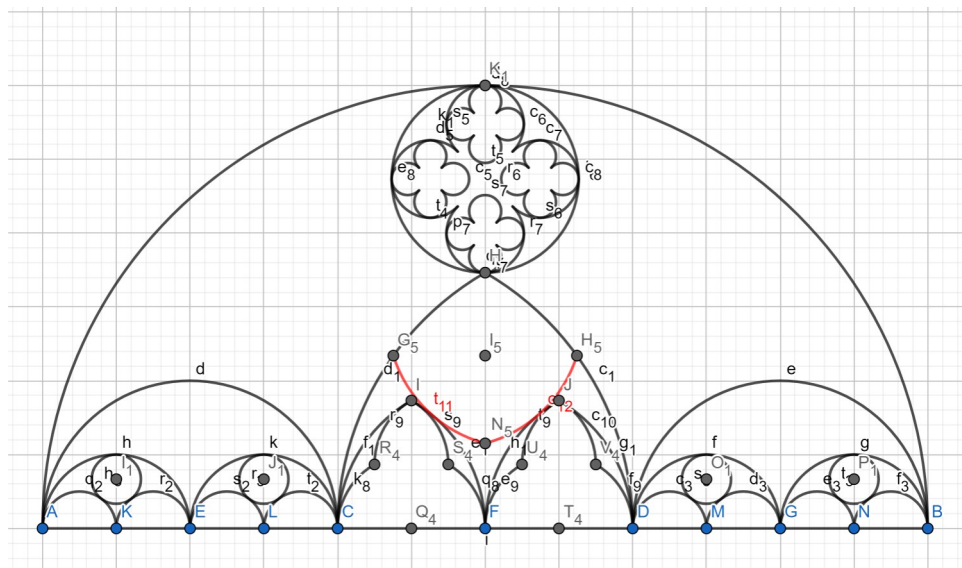
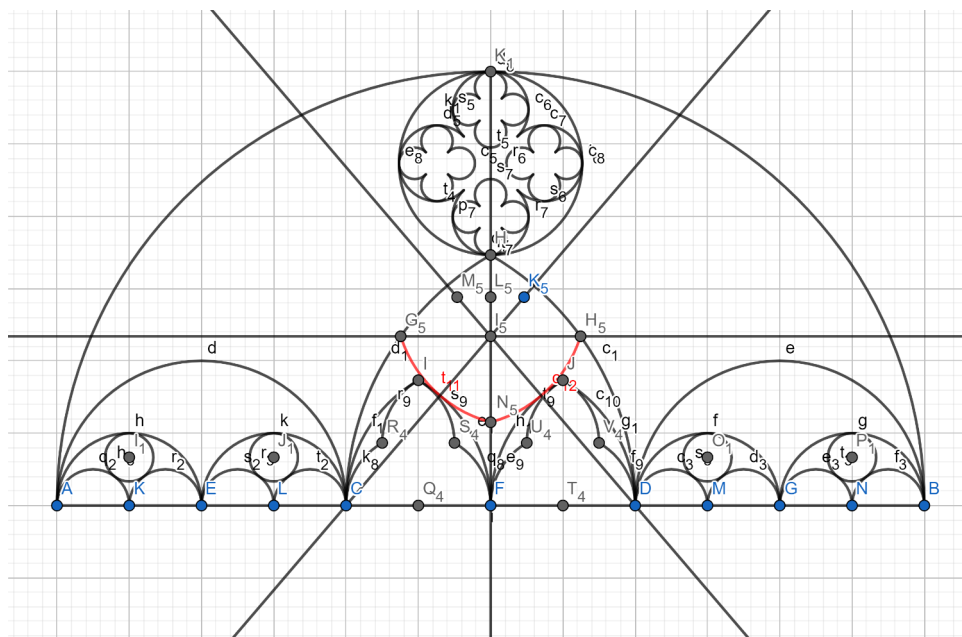
Krok 12

Przyjmijmy dowolną prostą równoległą $G_5 H_5$ do odcinka AB .

Rysujemy prostą przechodzącą przez punkty I_5C .

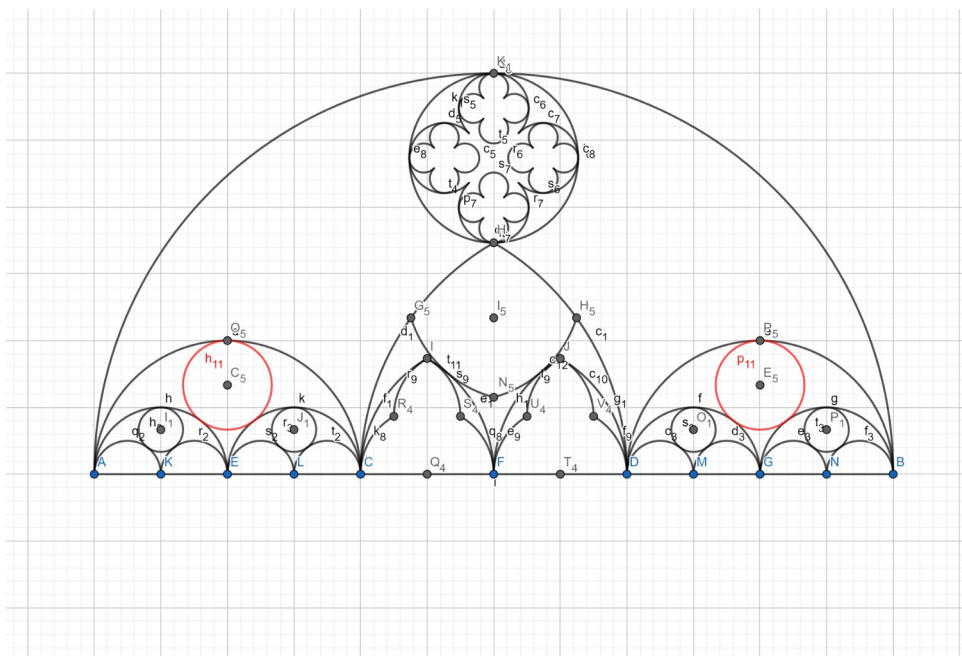
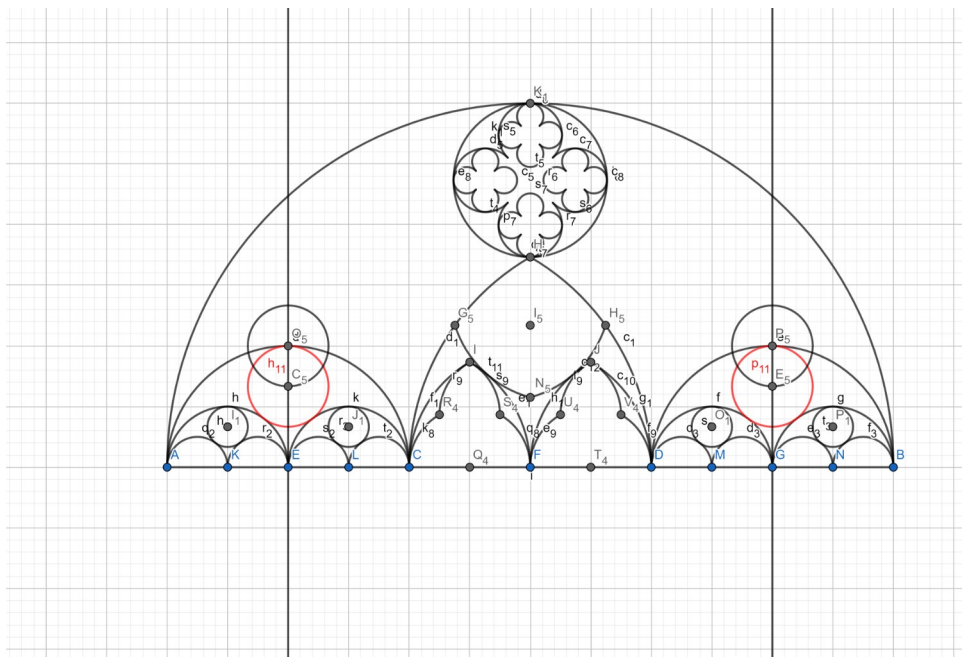
Rysujemy punkt N_5 w takiej samej odległości od punktu i_5 co punkt H.

Rysujemy punkt K_5 tak aby łuk G_5N_5 był styczny do łuku FI , analogicznie rysujemy łuk H_5N_5



Krok 13

Analogicznie do kroku 11 rysujemy okręgi o środku C_5 i promieniu $1/3 \cdot AE$ oraz o środku E_5 i promieniu $1/3 \cdot DG$.



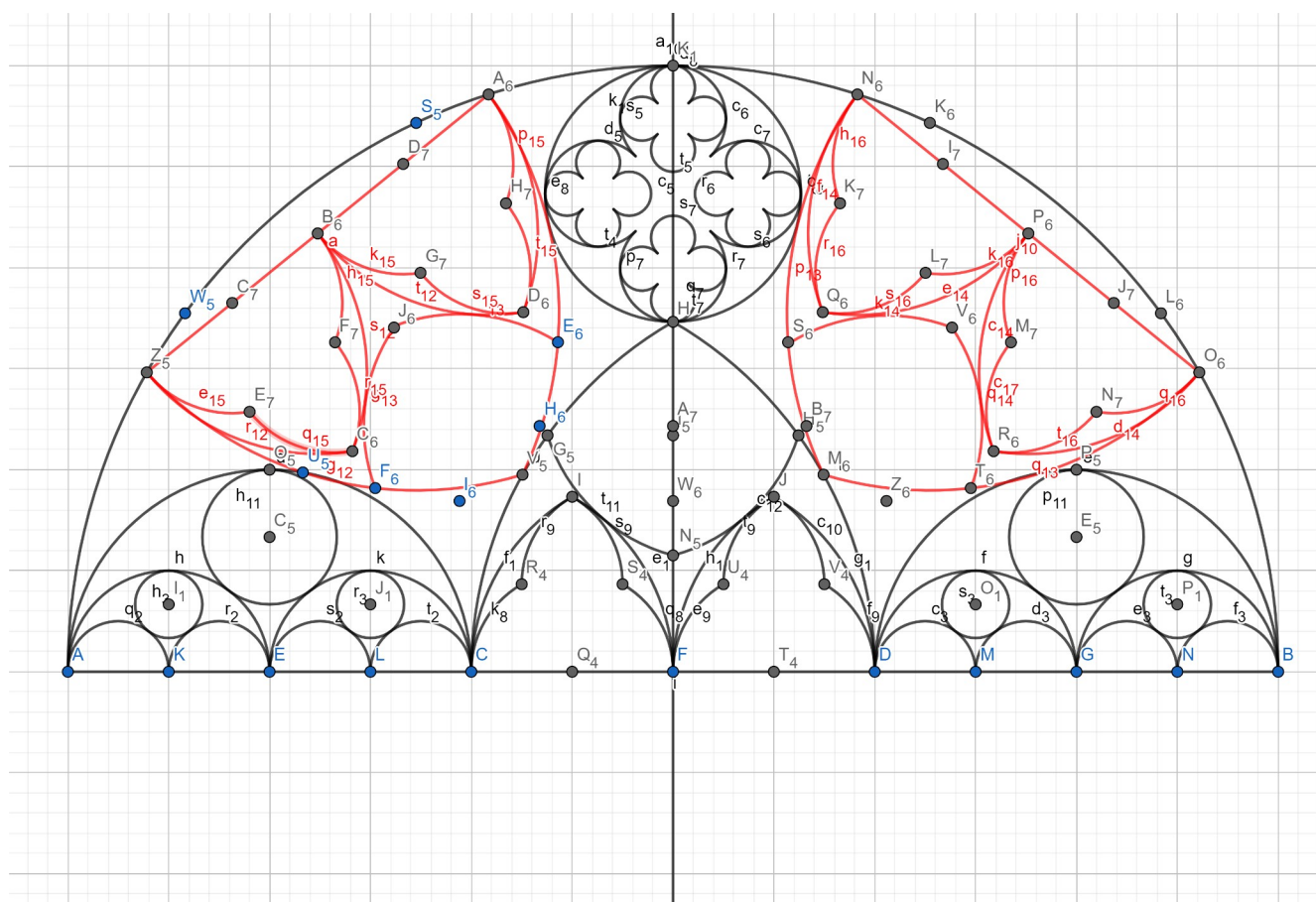
Krok 14

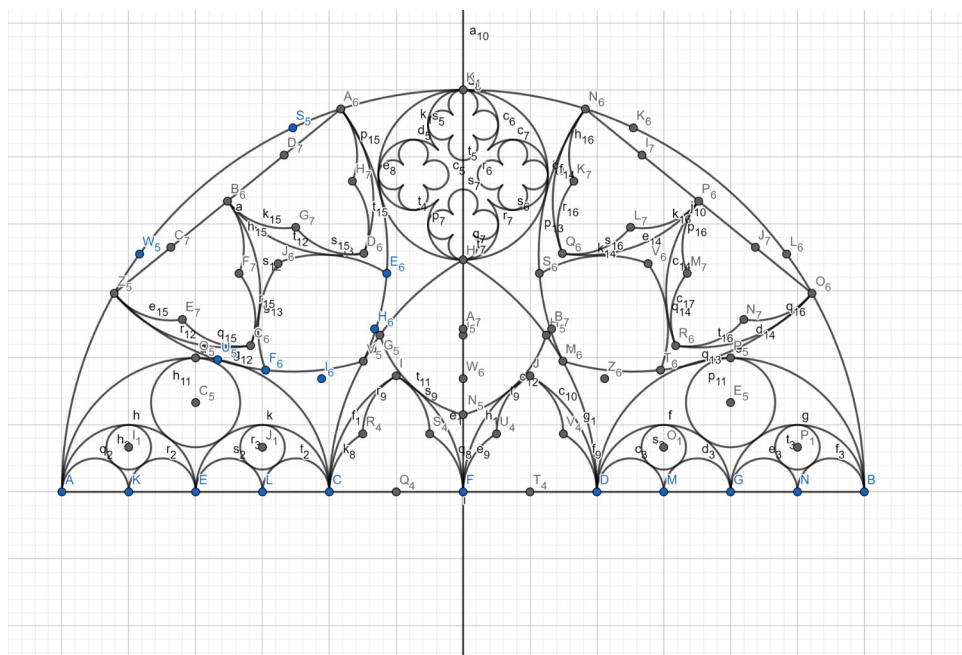
Przyjmujemy punkty S_5 i W_5 na półokręgu AB.

Rysujemy łuk o środku S_5 tak aby był styczny zewnętrznie do półokręgu AC.

Rysujemy łuk o środku W_5 tak aby był styczny zewnętrznie do okręgu o średnicy HK_1 .

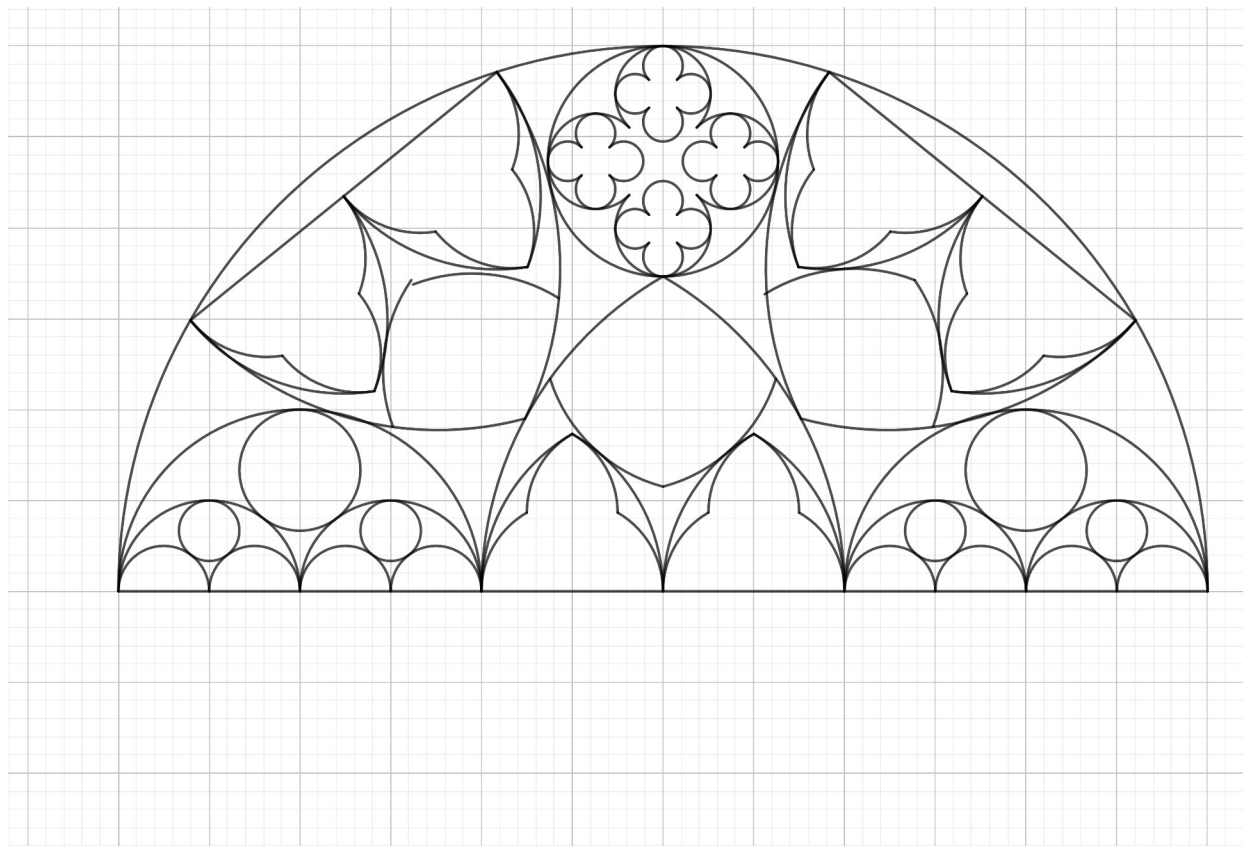
Dwa duże ostrołuki, które powstały 'wypełniamy' analogicznie do ostrołuku CDH.



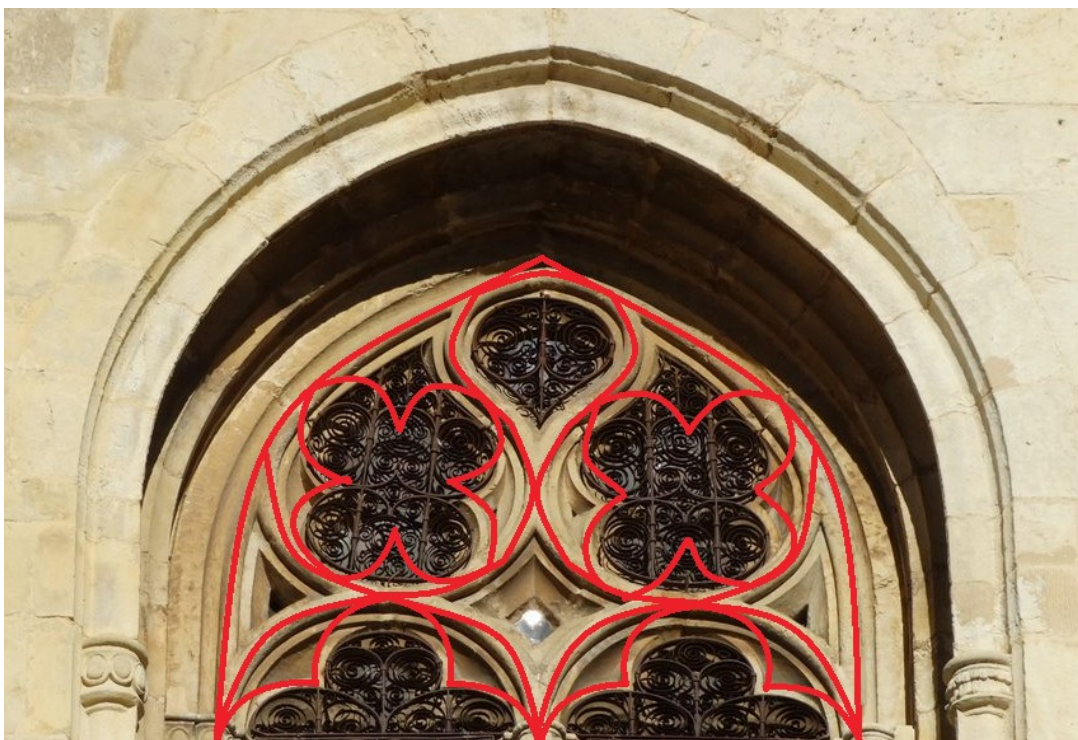


Krok 15

Usuwamy linie i punkty pomocnicze.



Matematyka w sztuce gotyku



Okno pochodzi z **Katedry Santa Maria de León** w Hiszpanii. Jest poświęcony Świętej Marii de la Regla. Potocznie nazywany jest „*Pulchra leonina*”.

Zbudowana w strategicznym miejscu w mieście, katedra jest arcydziełem z początków hiszpańskiego gotyku. Zbudowana między połową XIII i końcem XIV wieku. To bardzo jednorodny gotycki budynek.



, autor: Nieznany autor, licencja:

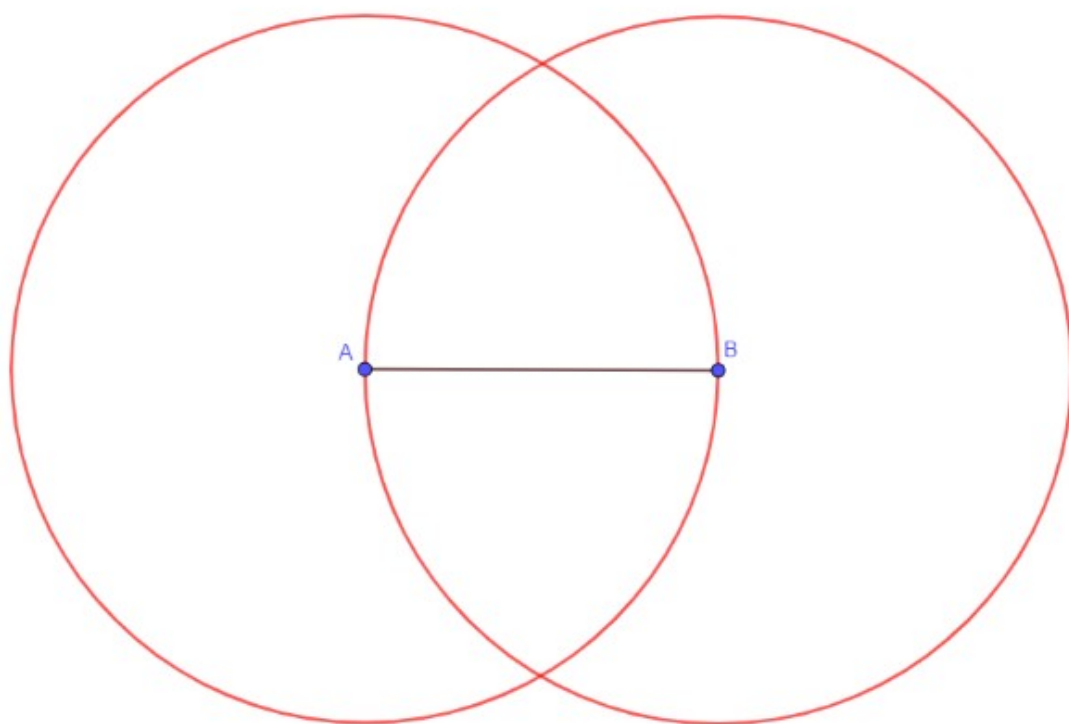


v

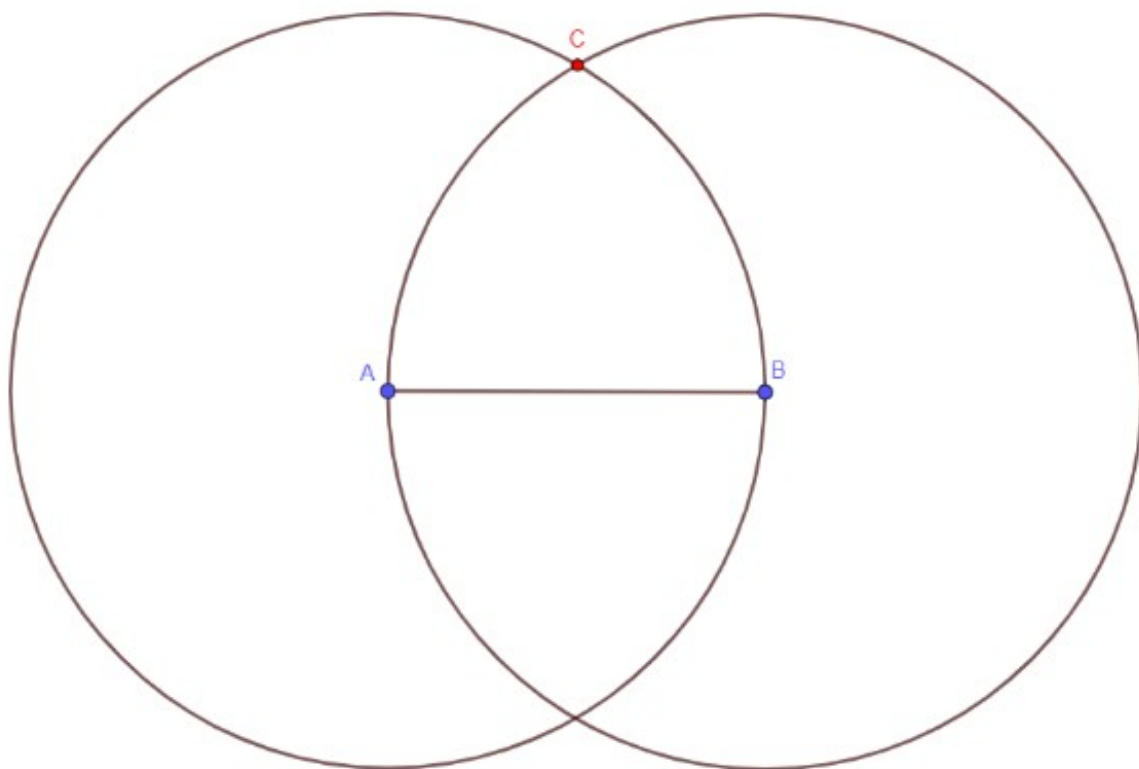
1. Rysujemy odcinek AB



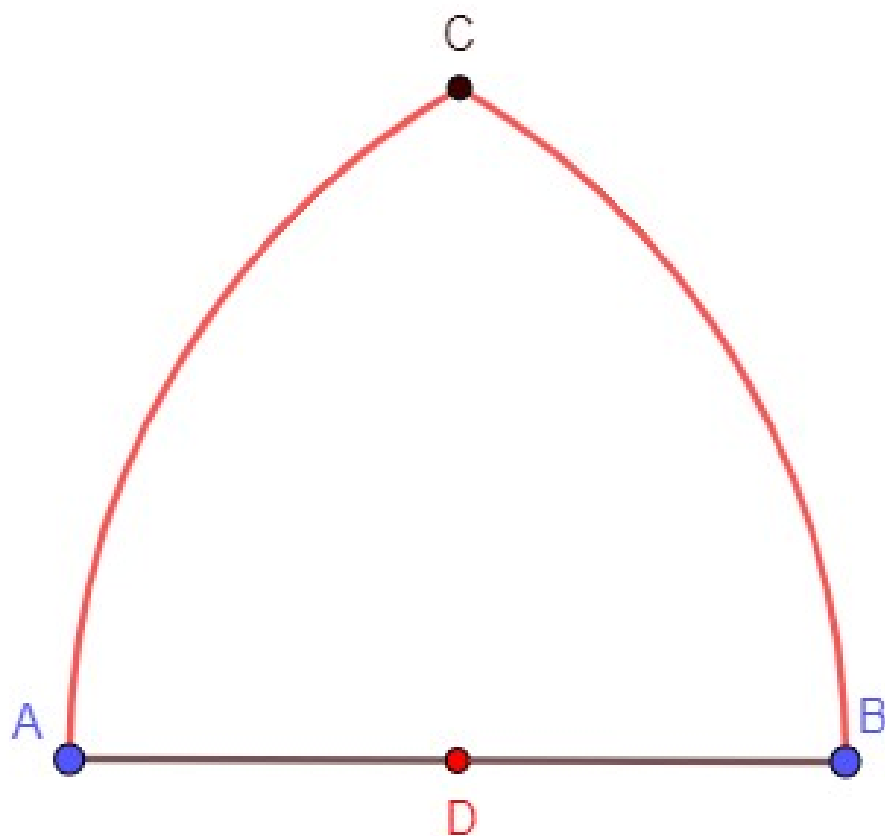
2. Rysujemy dwa okręgi o środkach A i B o promieniu AB



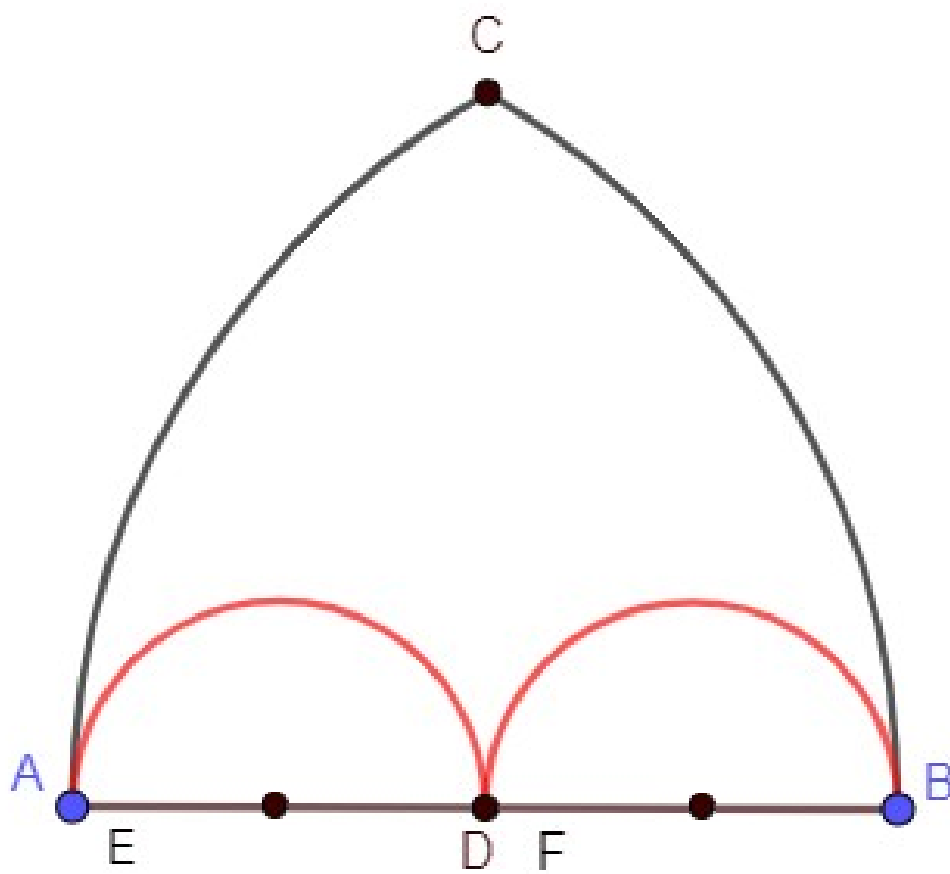
3. Zaznaczamy punkt przecięcia jako C



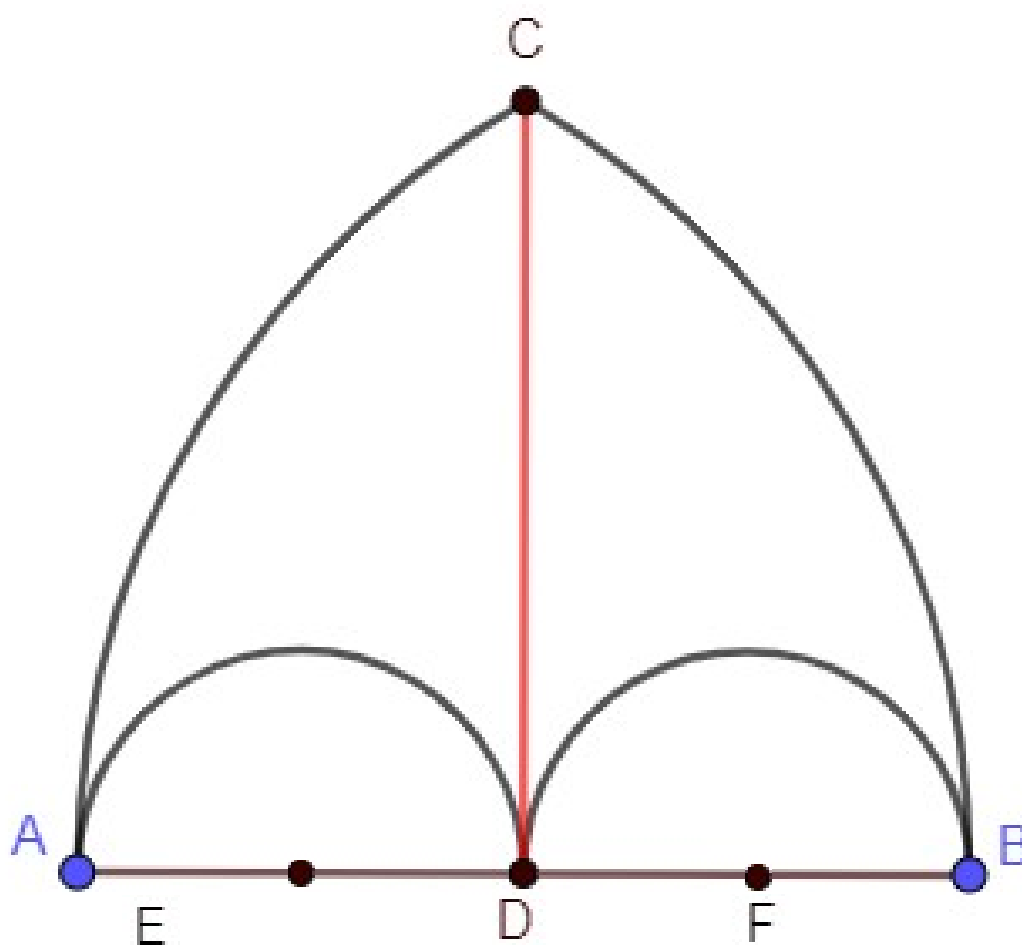
4. Rysujemy łuk o środku A i promieniu AB i łuk o środku B i promieniu AB oraz wyznaczamy punkt D jako środek odcinka AB



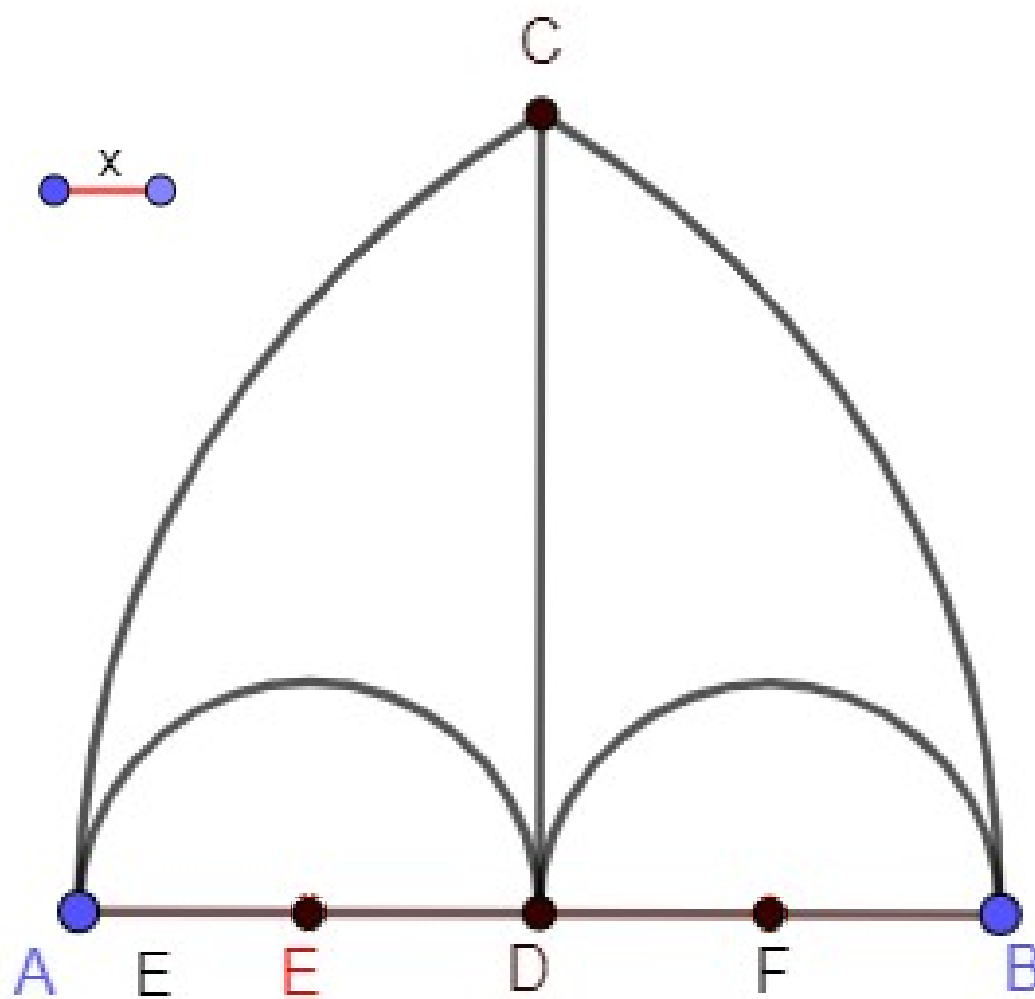
5. Rysujemy półokręgi o środkach E i F oraz promieniach AE i BF



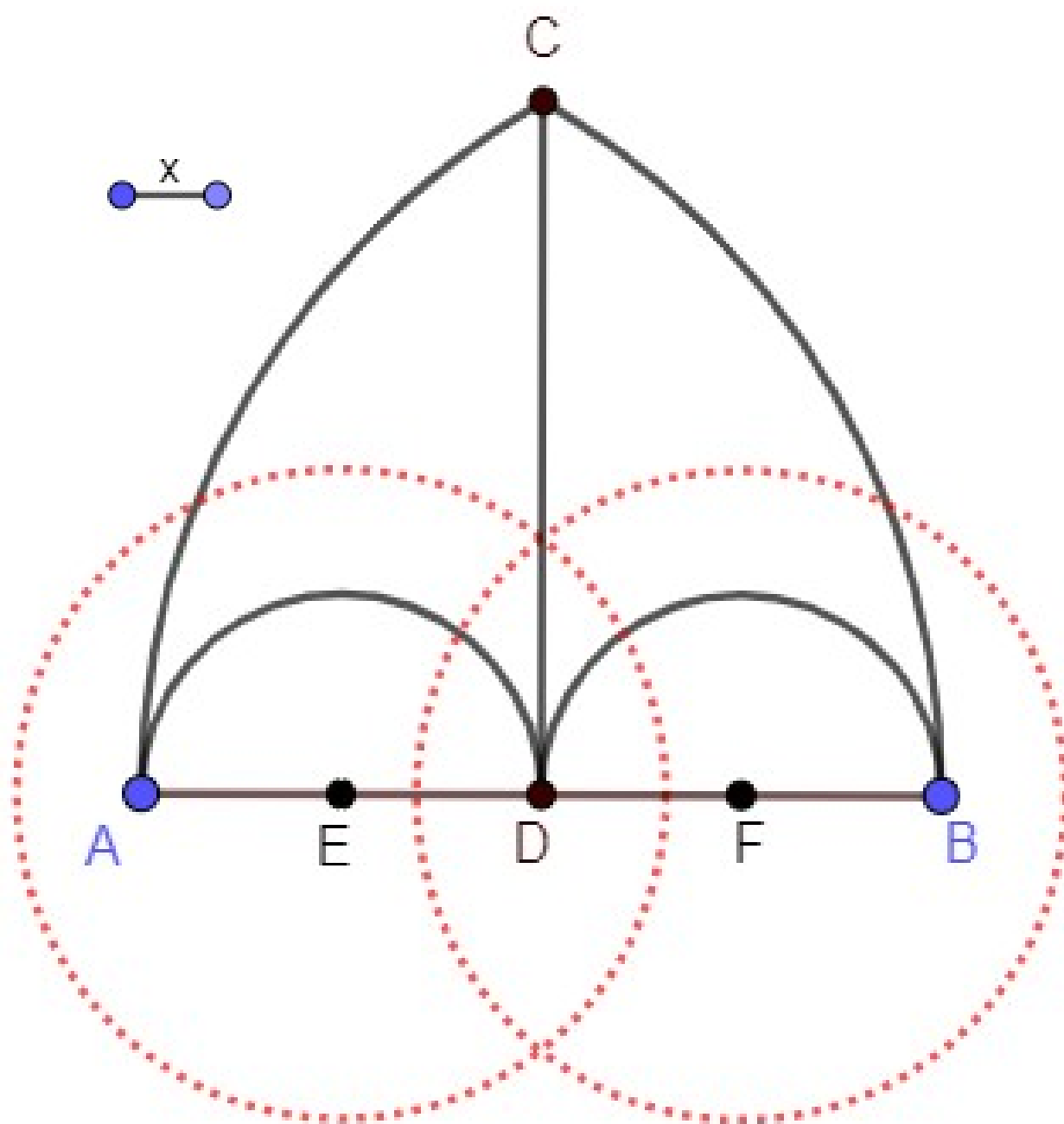
6. Rysujemy prostą prostopadłą do odc. AB przechodzącą przez punkty C i D



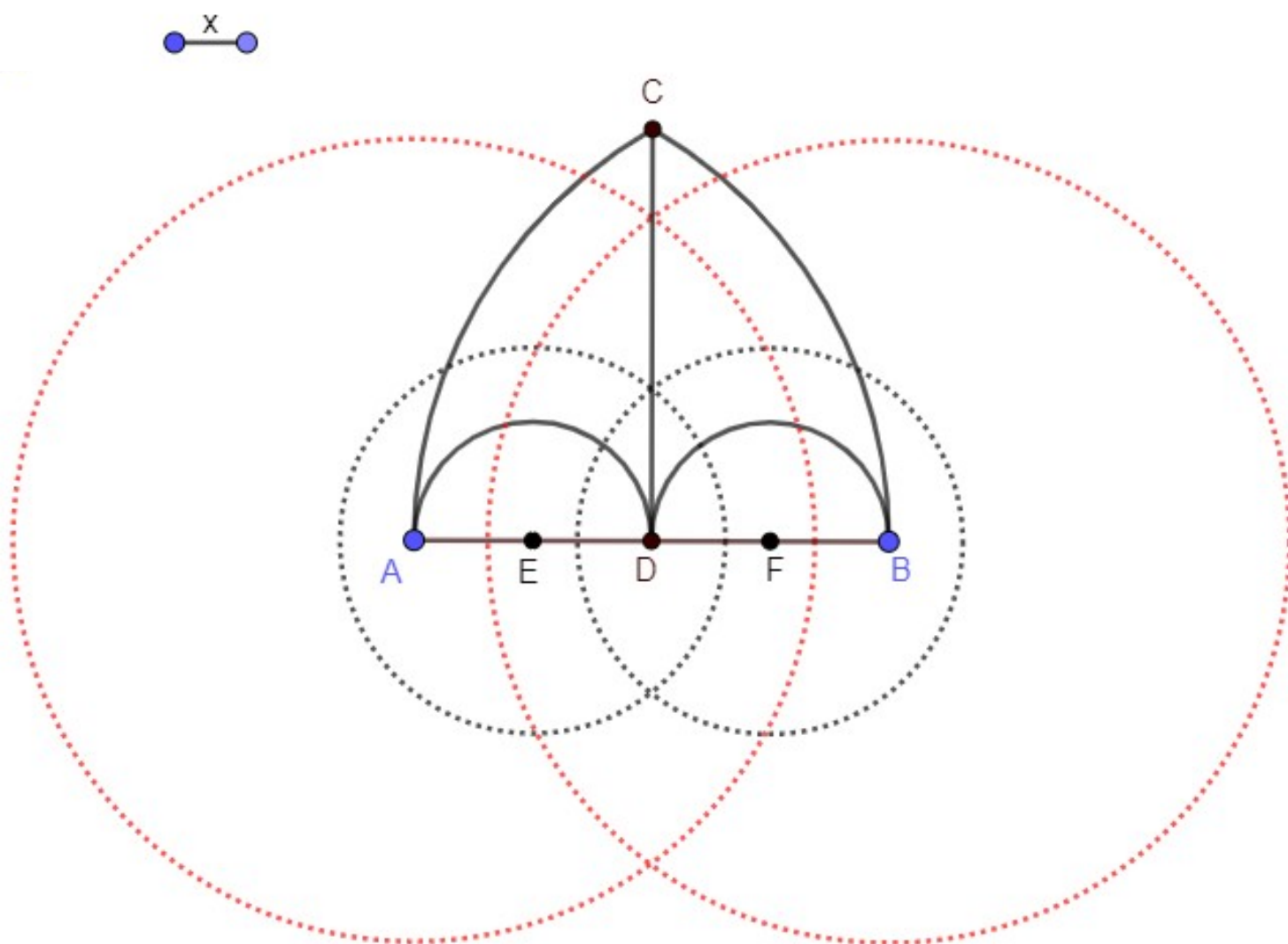
7. Rysujemy odcinek o długości x



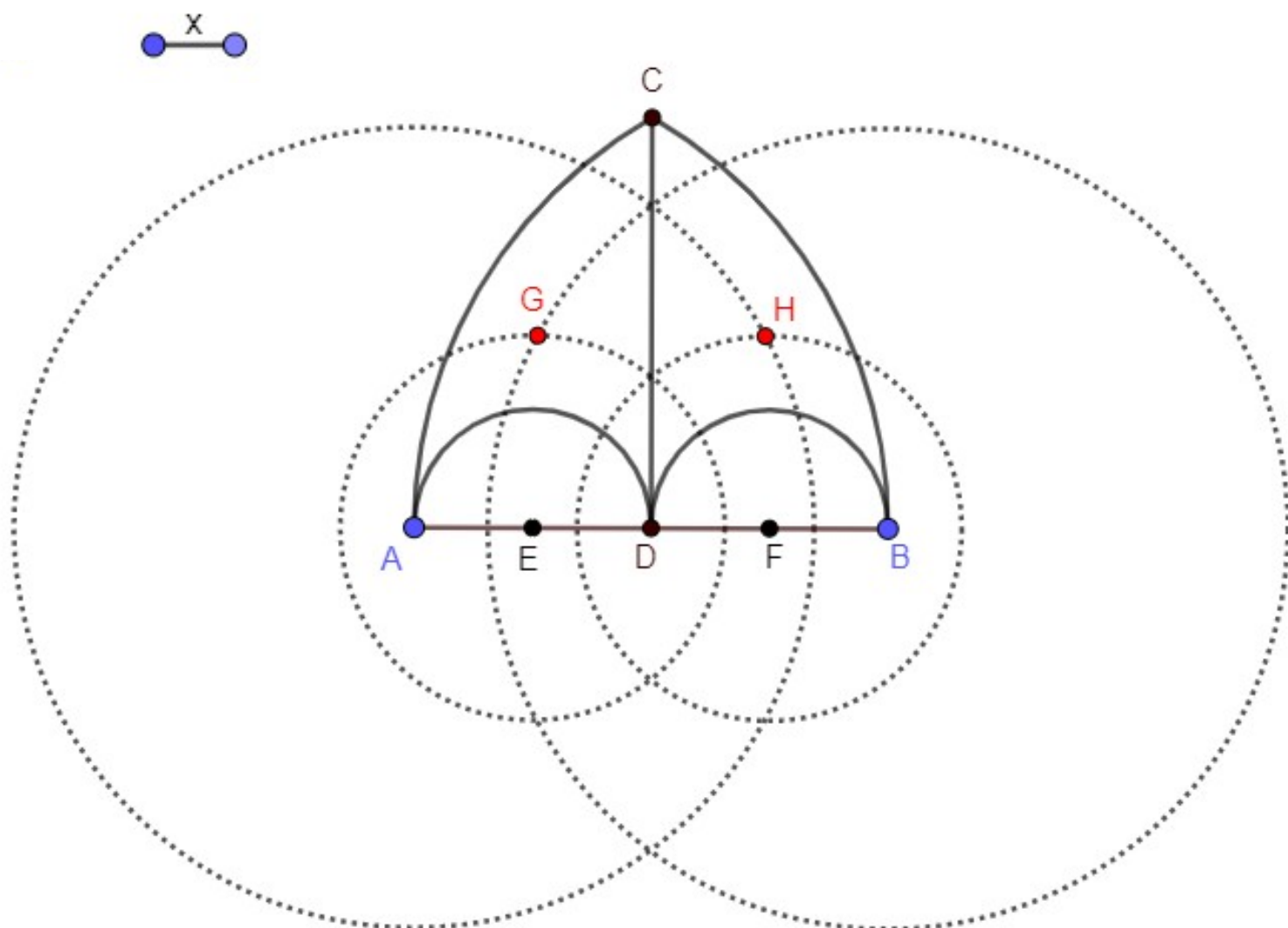
8. Rysujemy dwa okręgi i środki E i F oraz promieniach $ED + x$ oraz $FB + x$



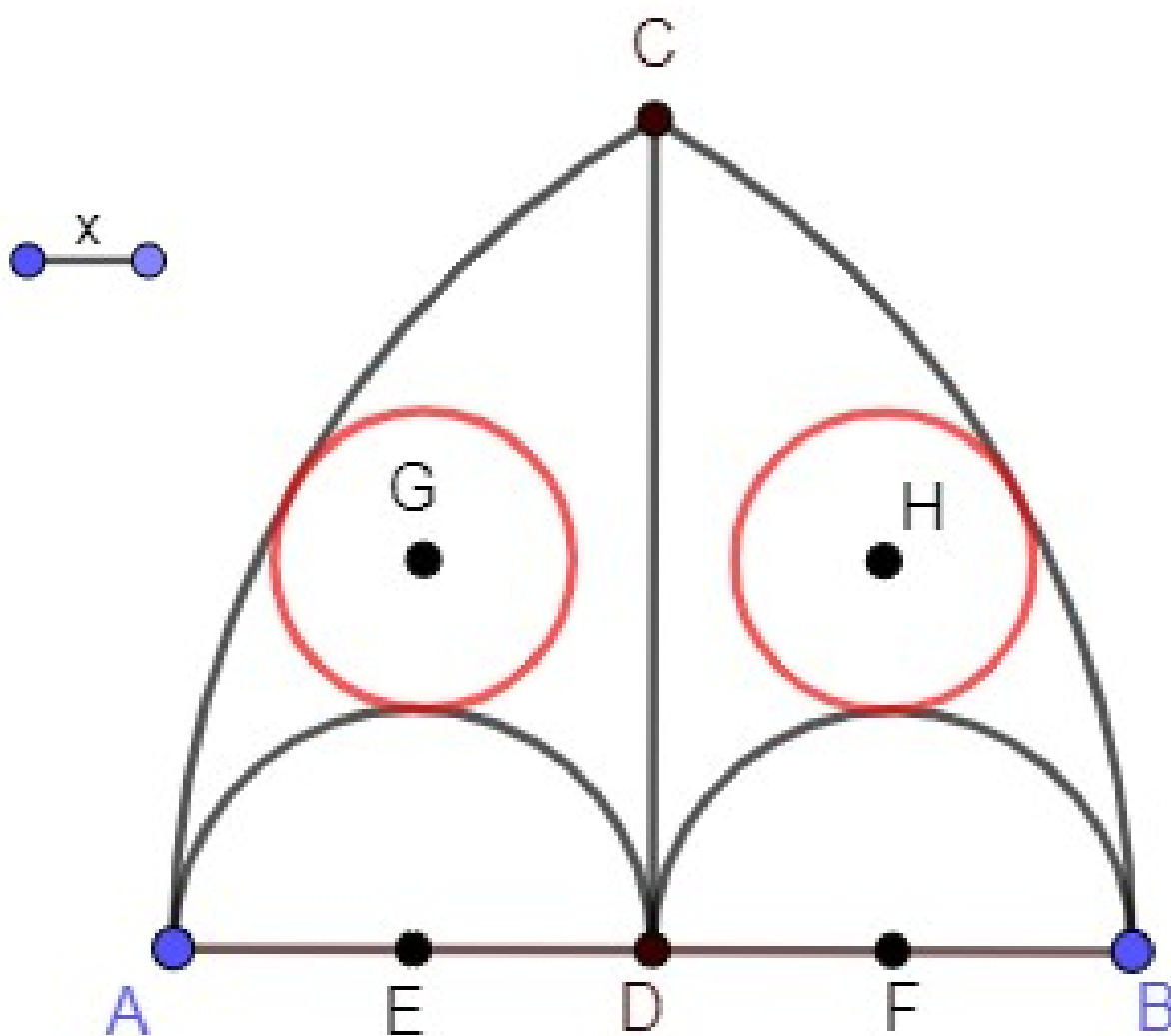
9. Podobnie, rysujemy dwa okręgi, ale o środkach A i B oraz promieniu $AB - x$



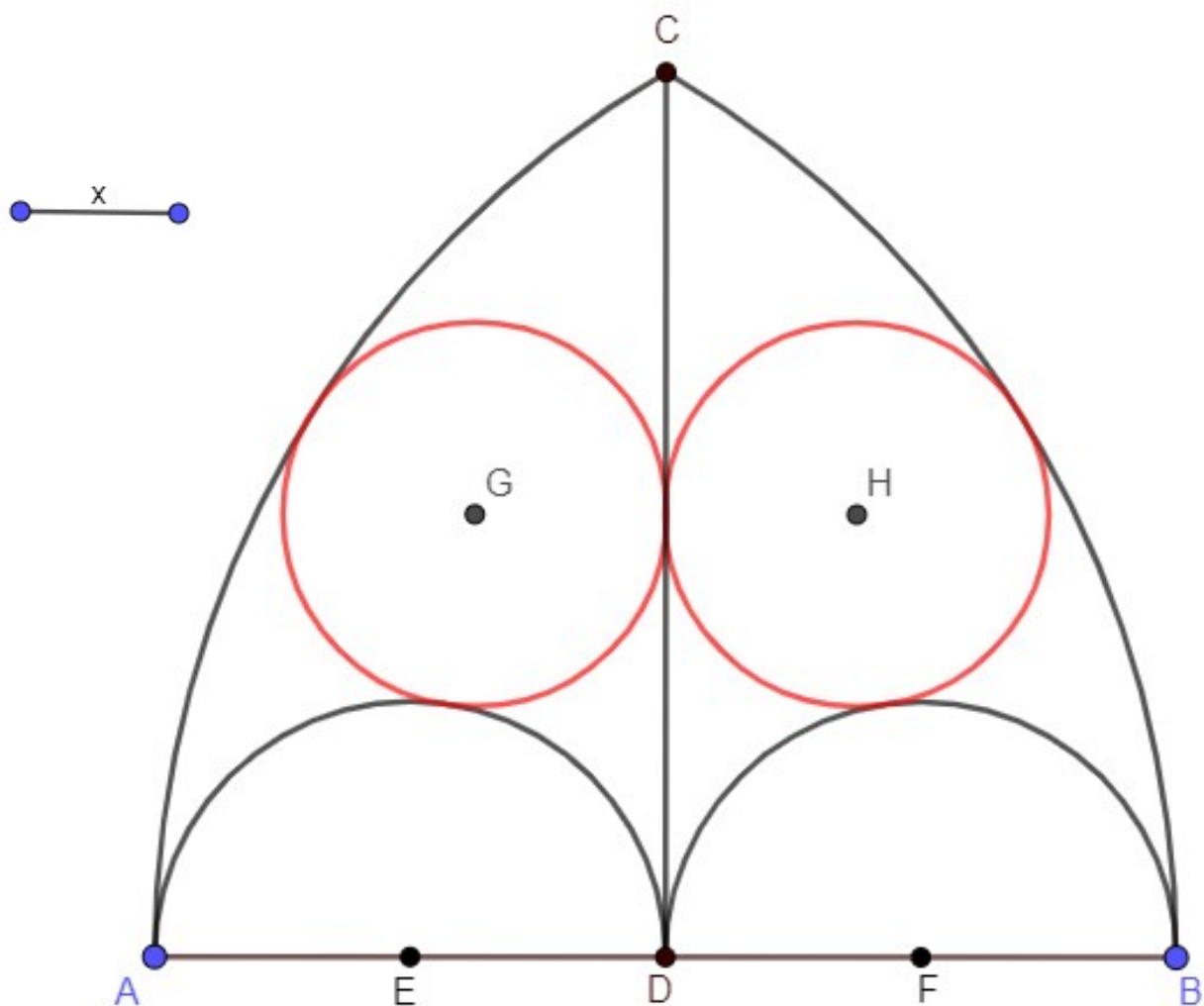
10. Zaznaczamy punkty G i H jako przecięcia narysowanych wcześniej okręgów.



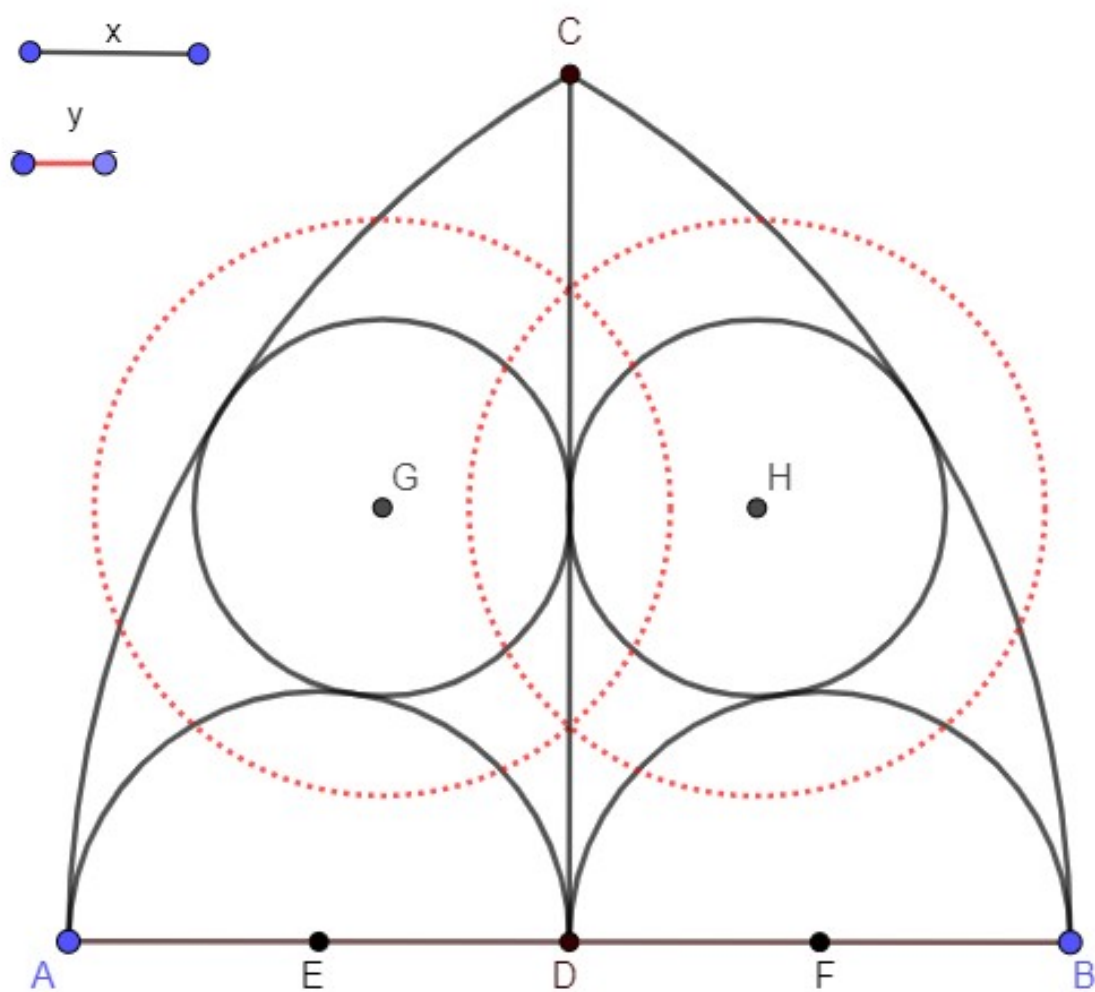
11. Rysujemy dwa okręgi o środkach G i H oraz promieniu x , więc są one styczne do łuków AC i BC oraz półłuków AD i DB



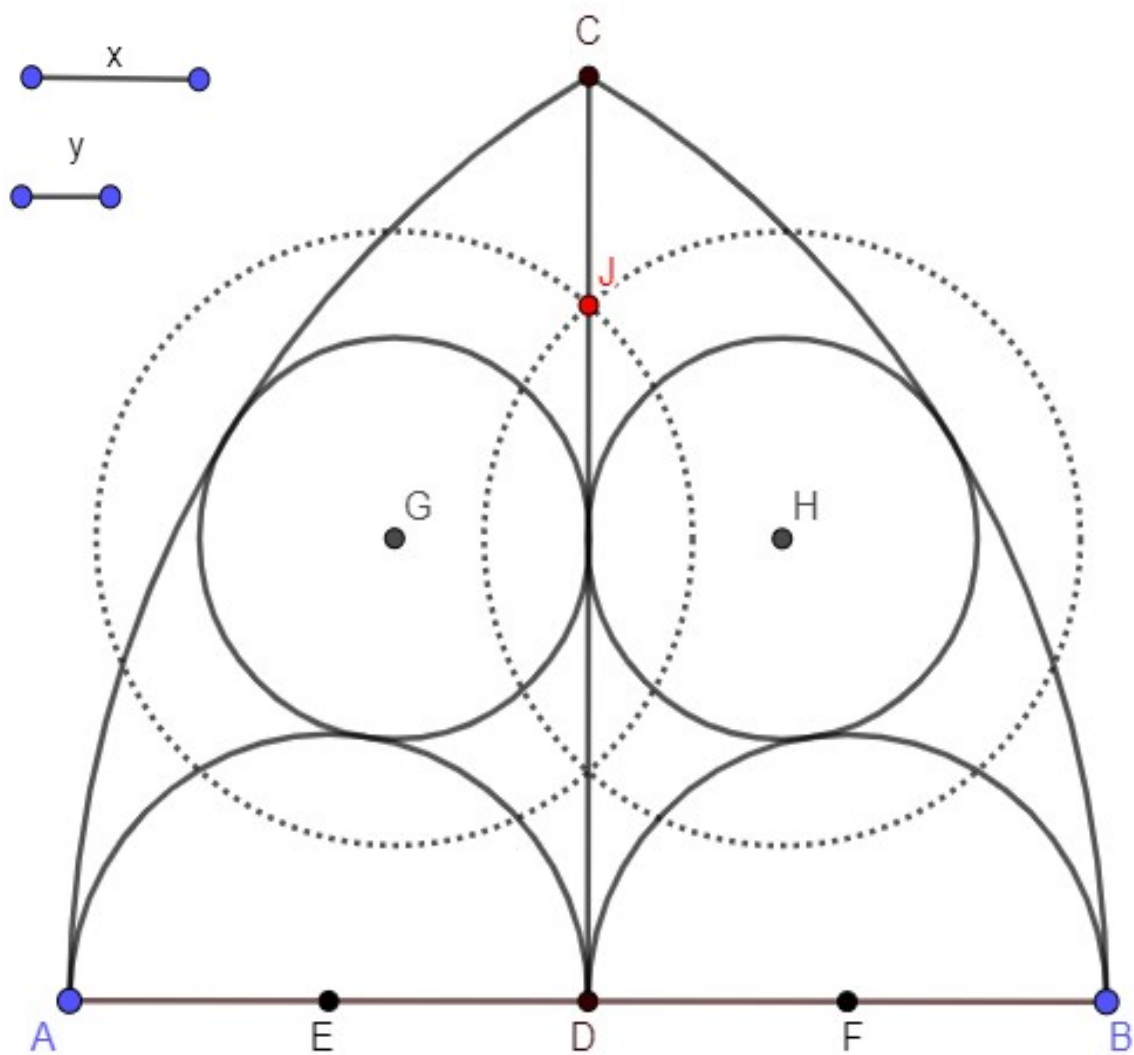
12. Okręgi o środkach G i H dopasowujemy za pomocą ich promienia (x), tak aby były styczne do odcinka CD



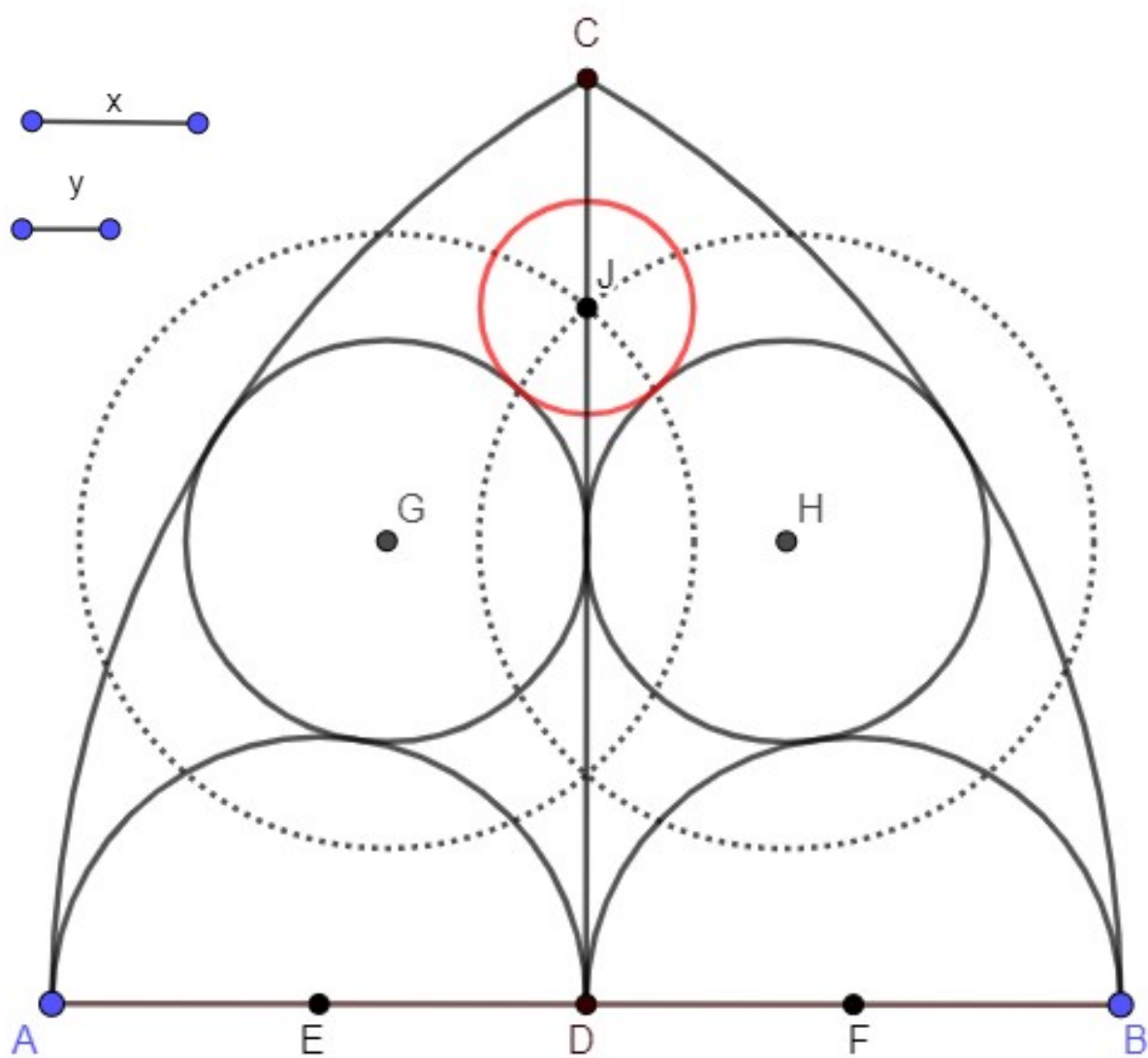
13. Rysujemy dwa okręgi o środkach G i H oraz poprzednio wyznaczonemu promieniowi y



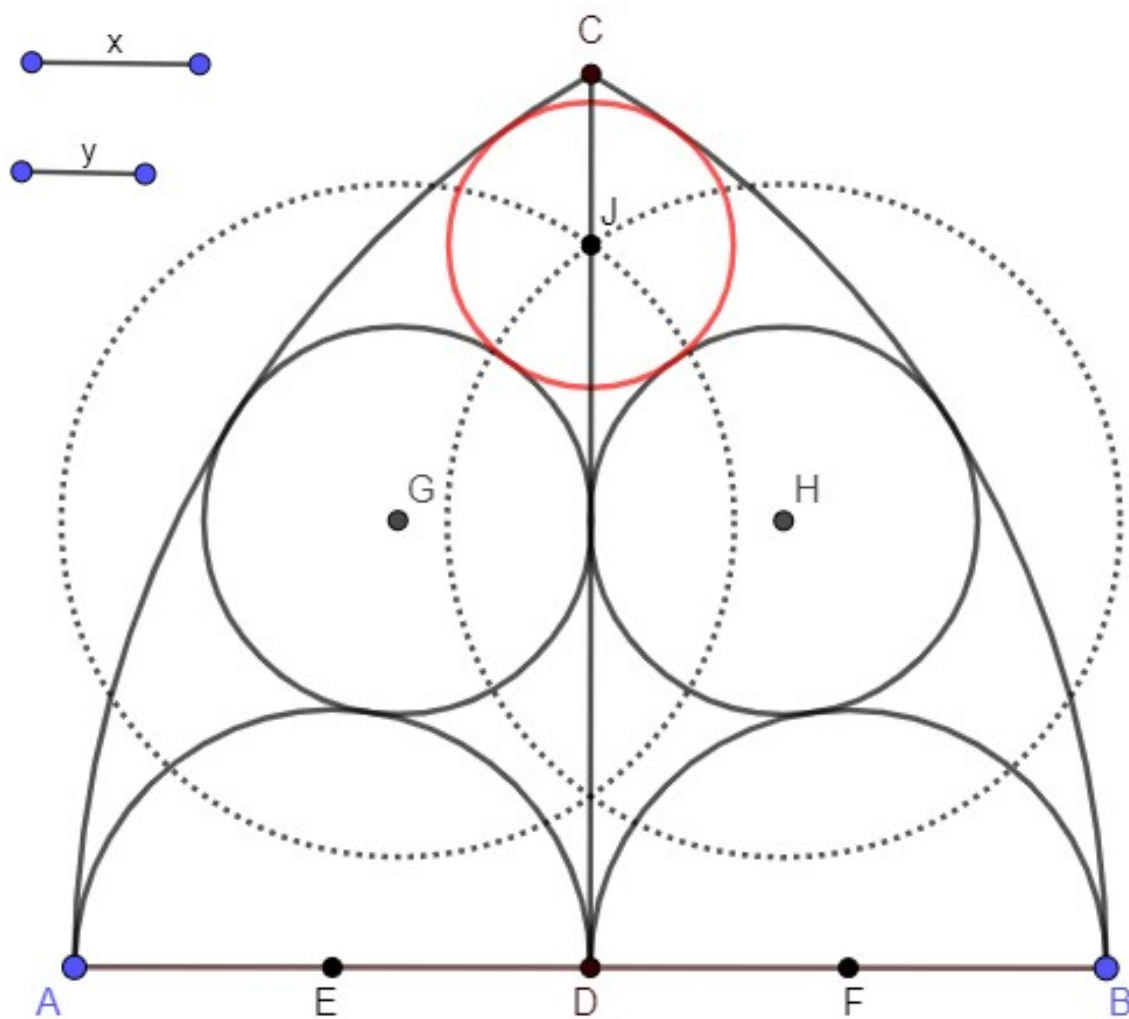
14. Zaznaczamy punkt przecięcia poprzednie narysowanych okręgów



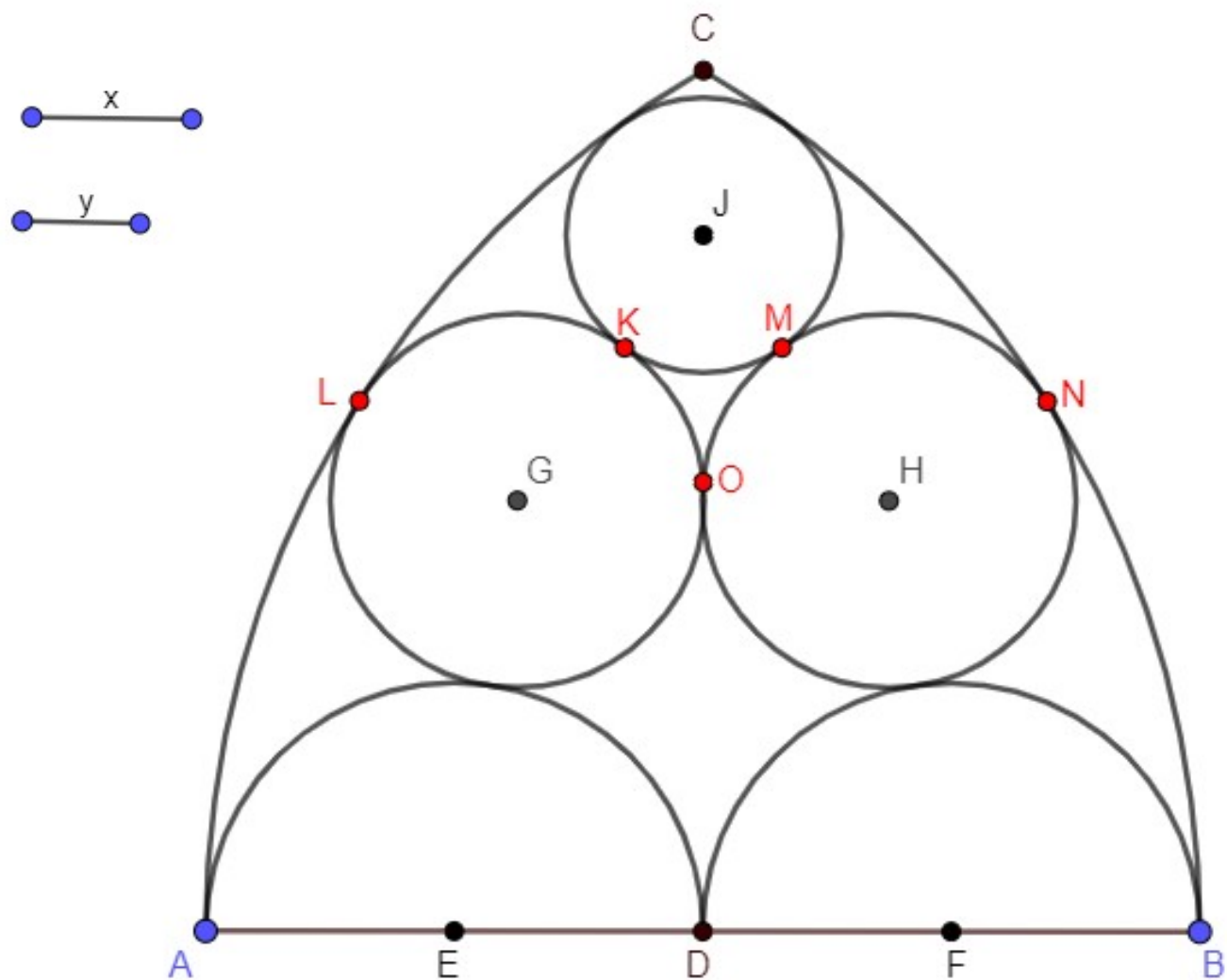
15. Rysujemy okrąg o środku J i promieniu y , więc jest on styczny do okręgów o środkach G i H oraz promieniu x



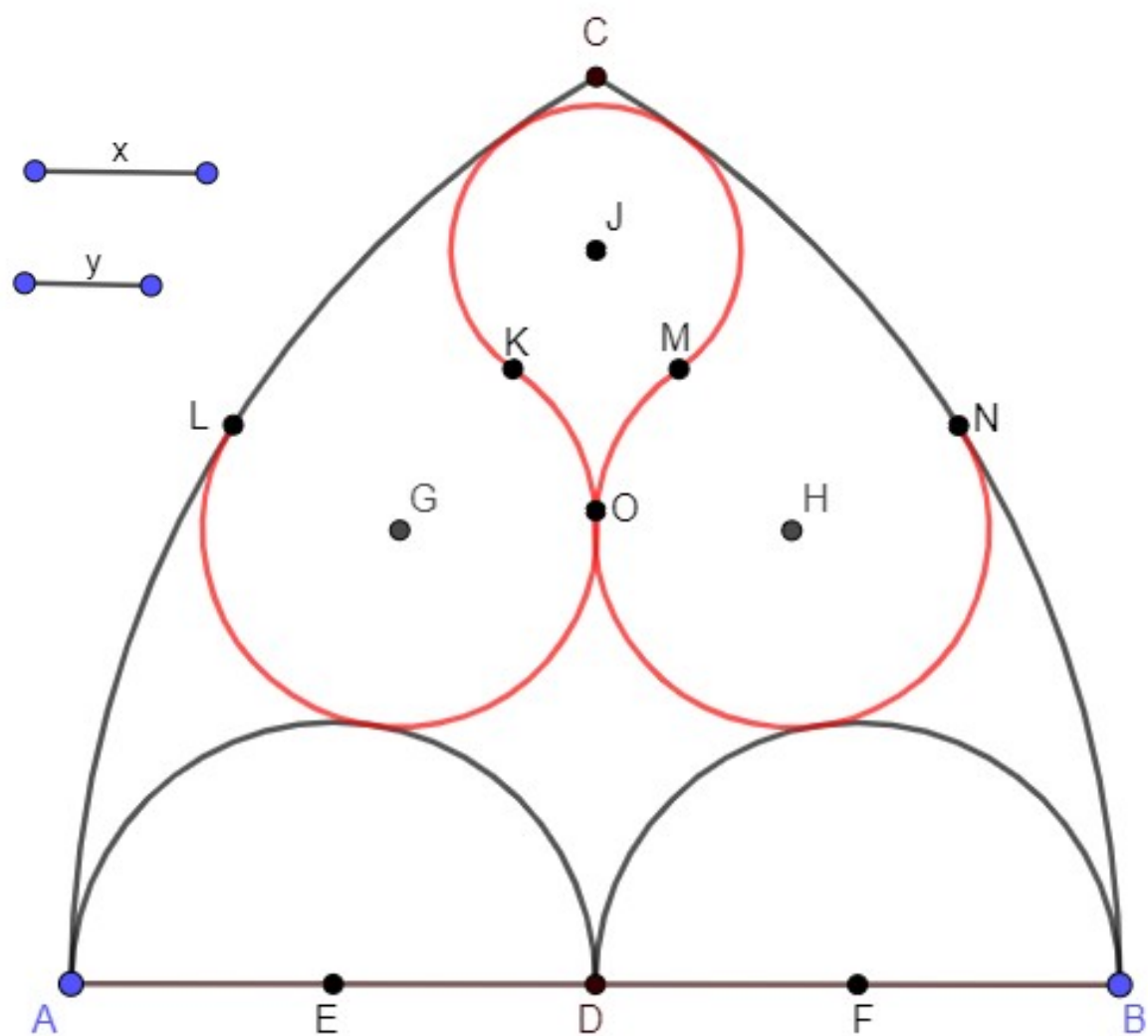
16. Okrąg o środku J dopasowujemy za pomocą jego promienia (y), tak aby był styczny do łuków AC i BC
Jest on styczny, ponieważ...



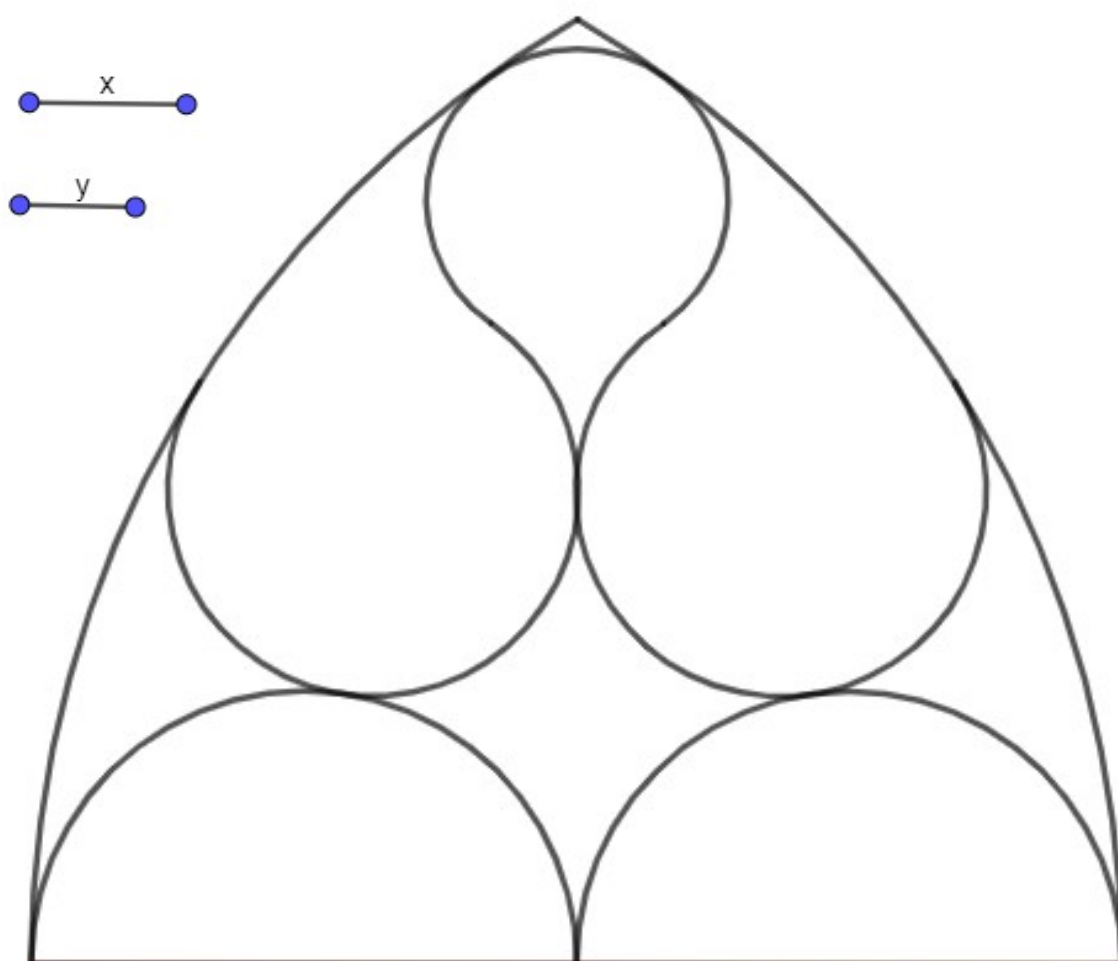
17. Zaznaczamy punkty styczności: L, K, N, M, O



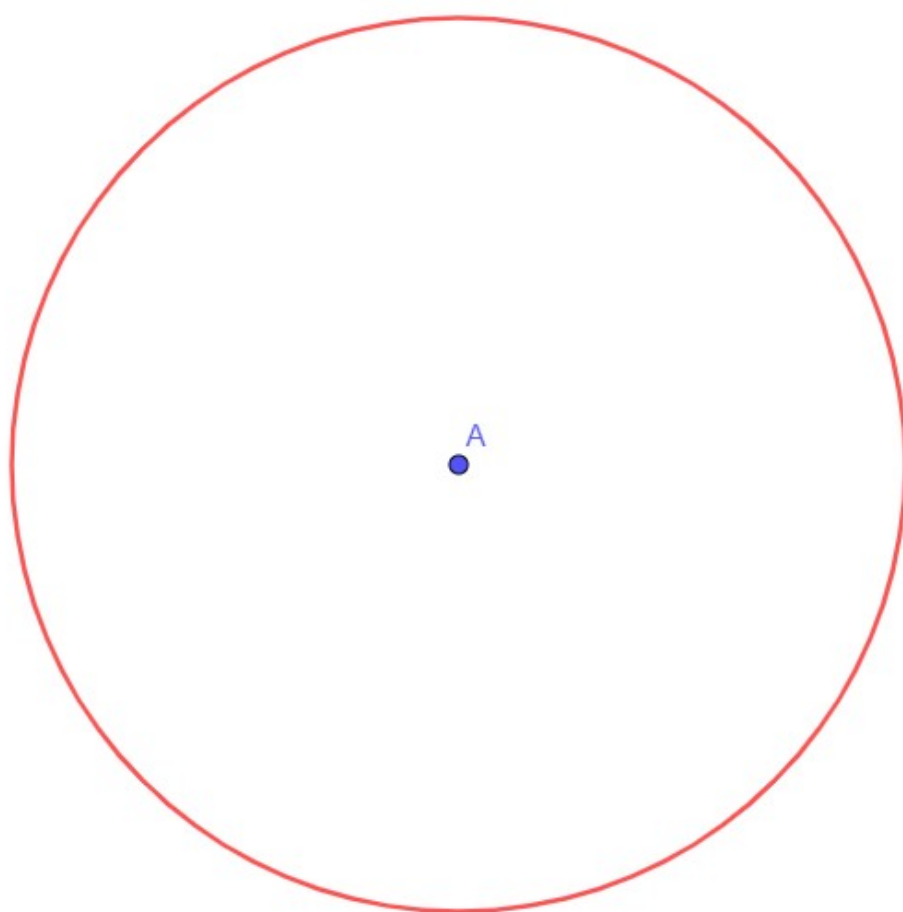
18. Wymazujemy łuki: LK, MN i MK



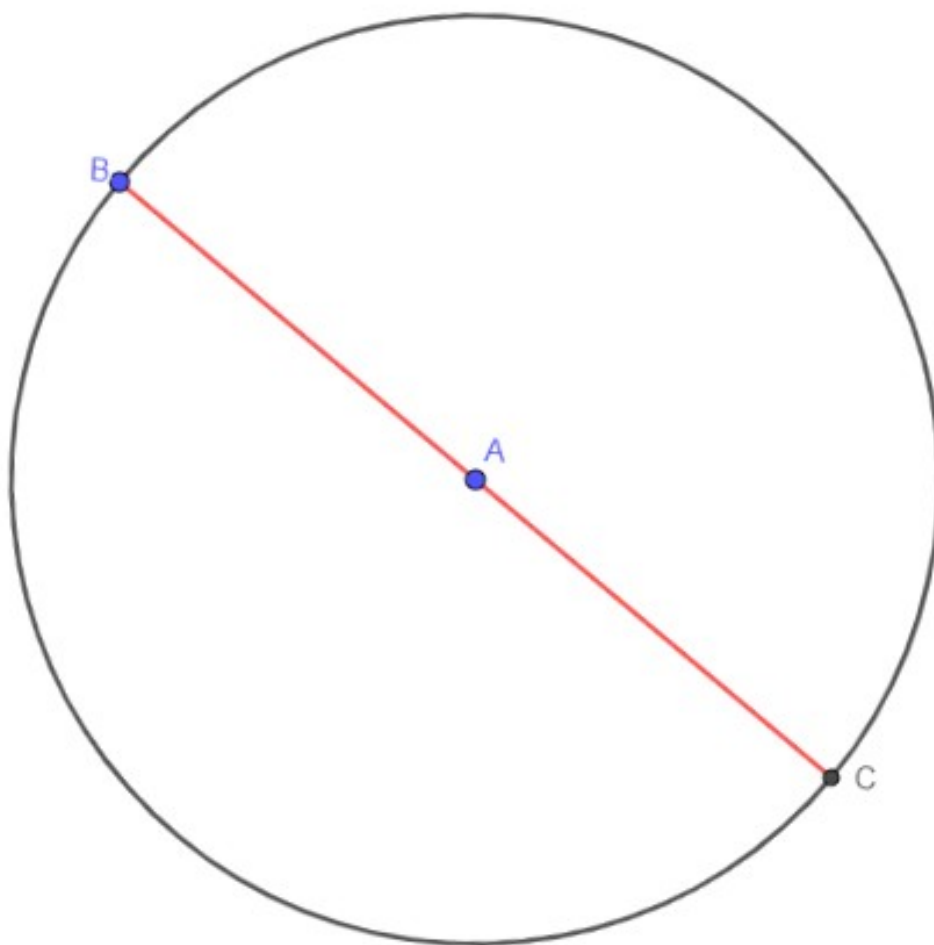
19. Wymazujemy wszystkie punkty



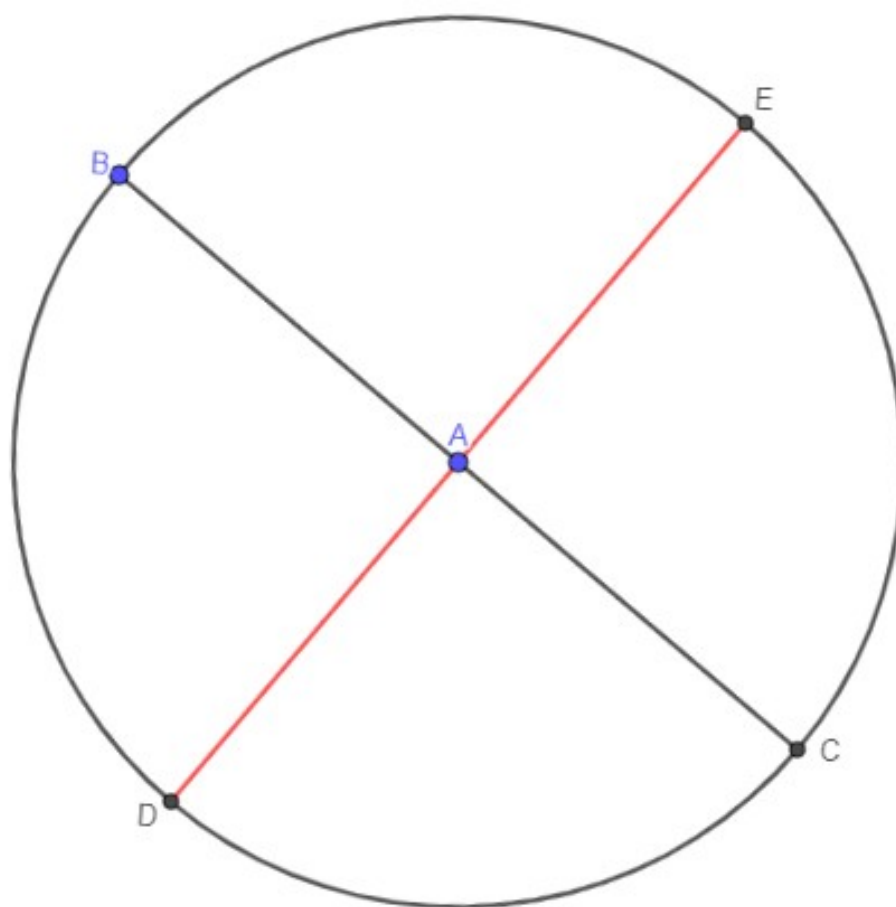
20. Rysujemy okrąg o środku A



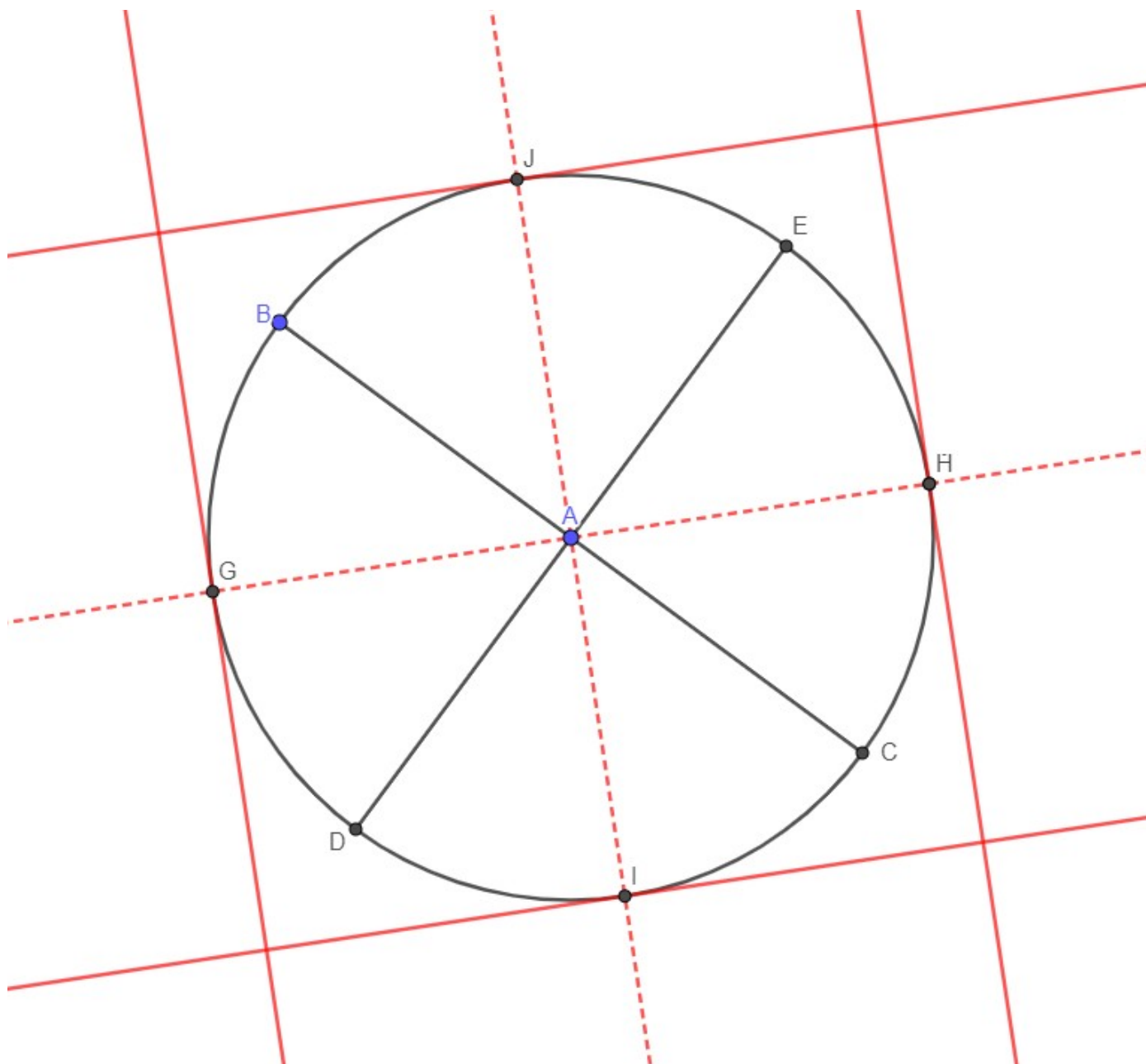
21. Rysujemy średnicę BC tego okręgu



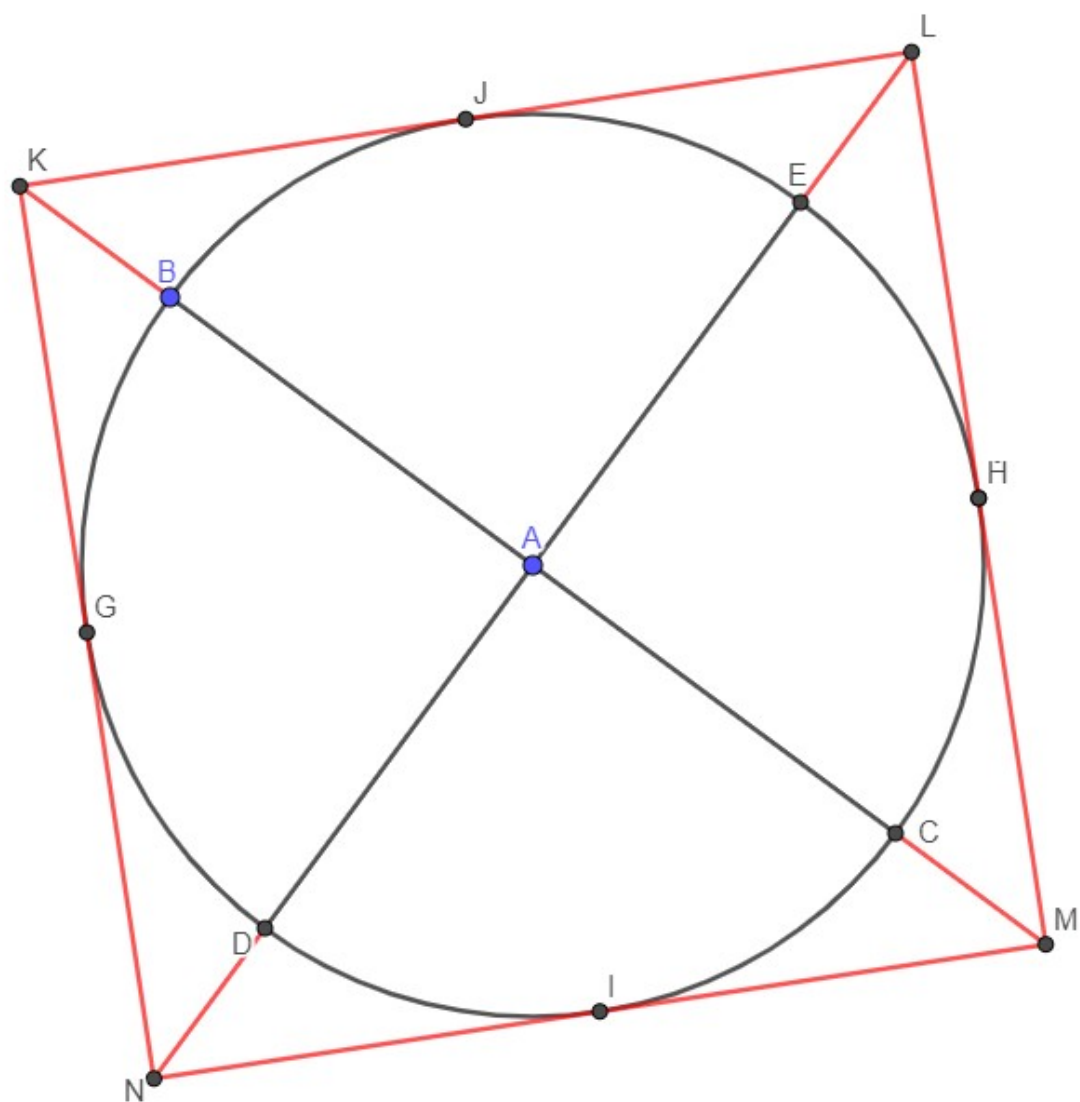
22. Rysujemy drugą średnicę DE prostopadłą do BC



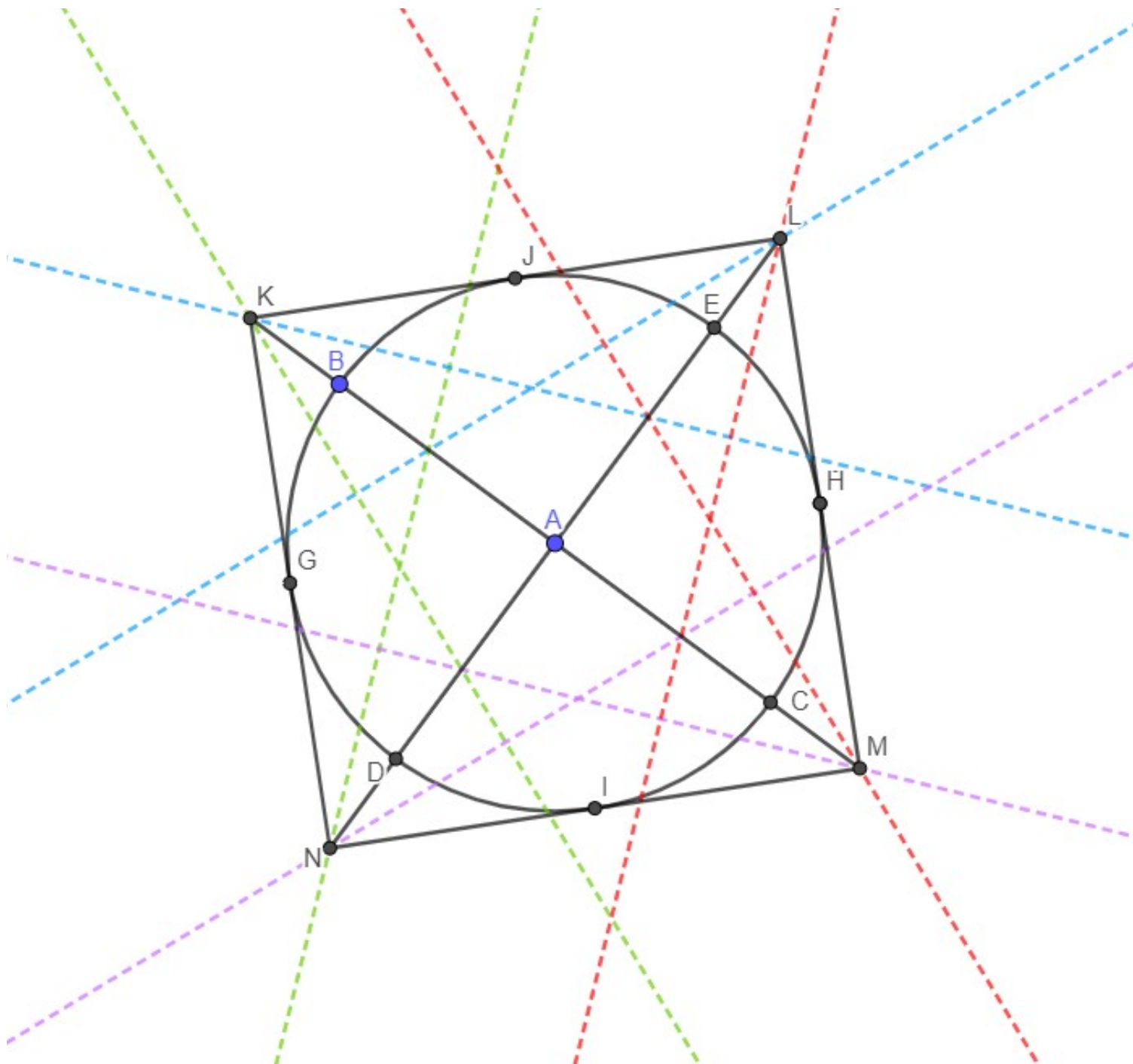
23. Rysujemy dwusieczne kątów BAD , DAC , CAE i EAB , zaznaczamy punkty przecięcia dwusiecznych z okręgiem (punkty G , I , R i J) oraz rysujemy styczne okręgu przechodzące przez te punkty



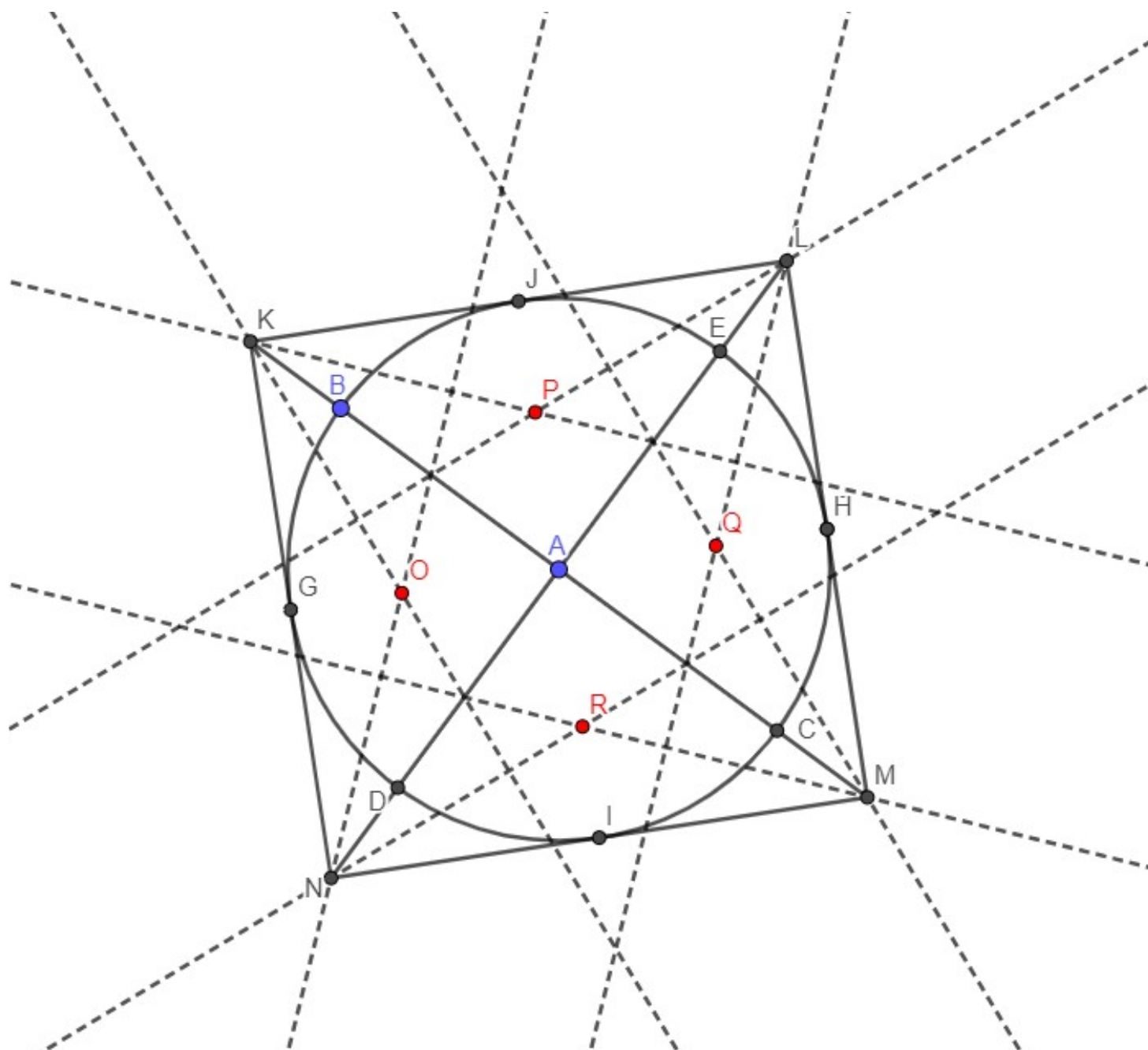
24. Zaznaczamy punkty przecięcia stycznych jako punkty: K, N, M i L i rysujemy przedłużenia średnic do tych punktów



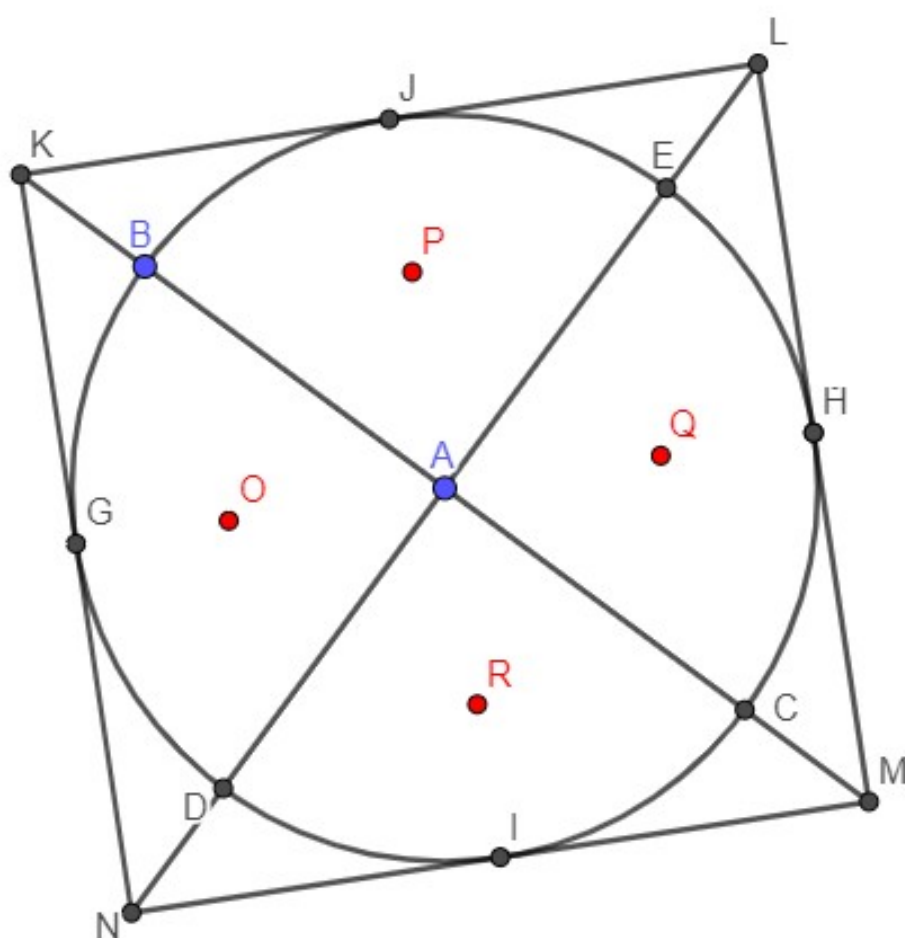
25. W każdym powstałym trójkącie równoramiennym rysujemy dwusieczne dwóch równych kątów



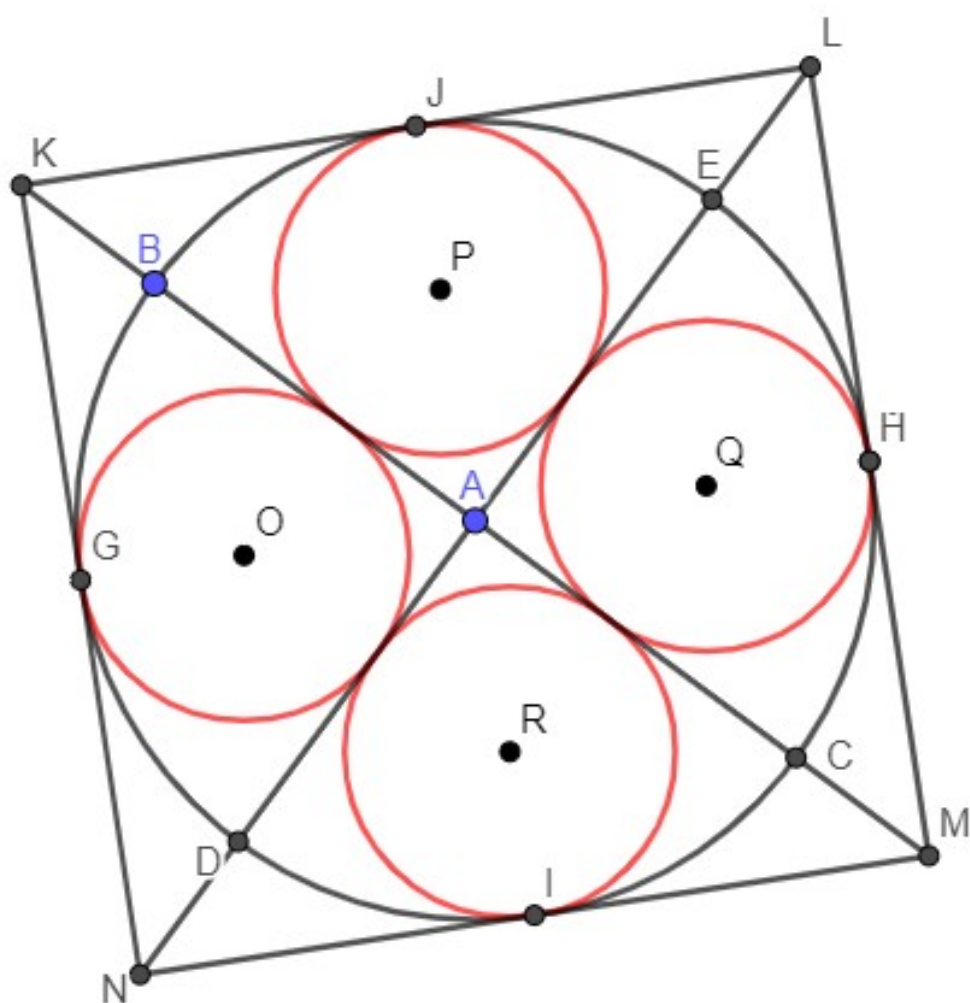
26. Zaznaczamy punkty przecięć tych środkowych jako punkty: O, R, Q i P, są one środkami trójkątów prostokątnych, równoramiennych: KAN, NAM, MAL i LAK



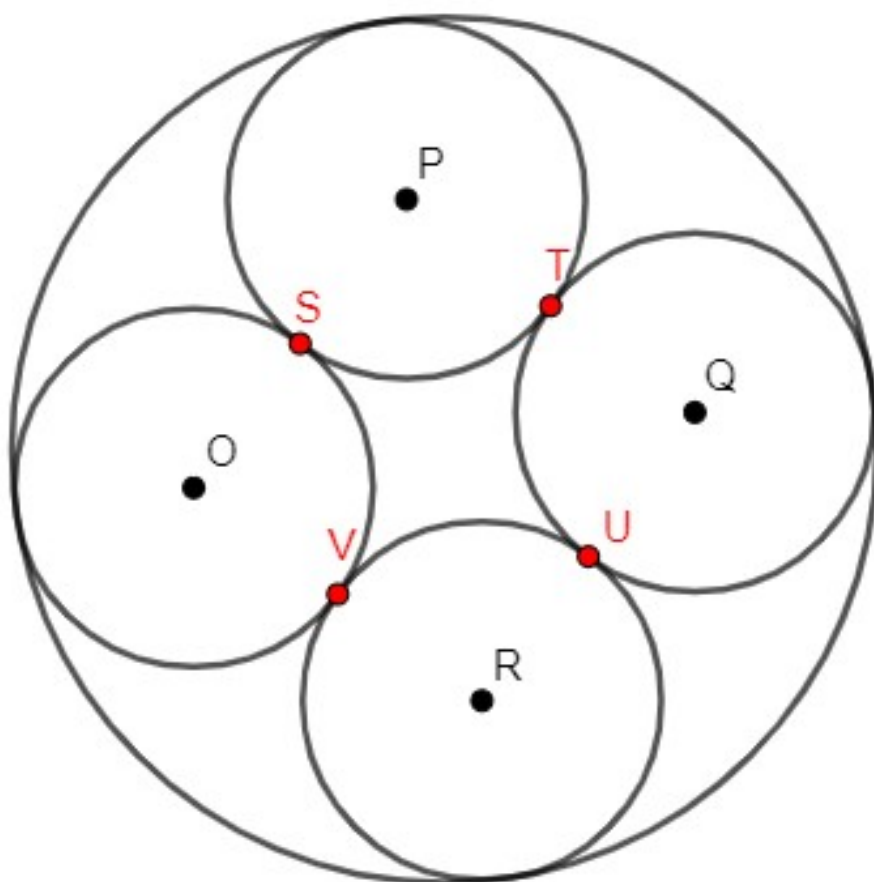
27. Wymazujemy wszystkie środkowe



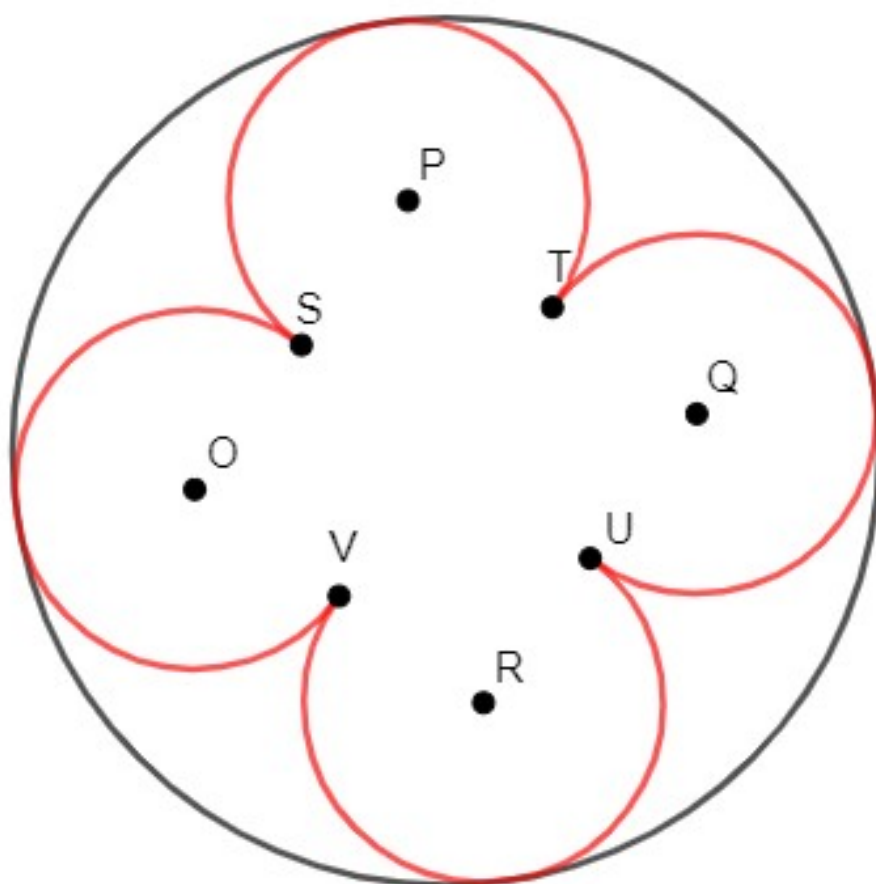
28. Rysujemy okręgi o środkach O , R , Q , P i promieniach OG , RI , OR , PJ



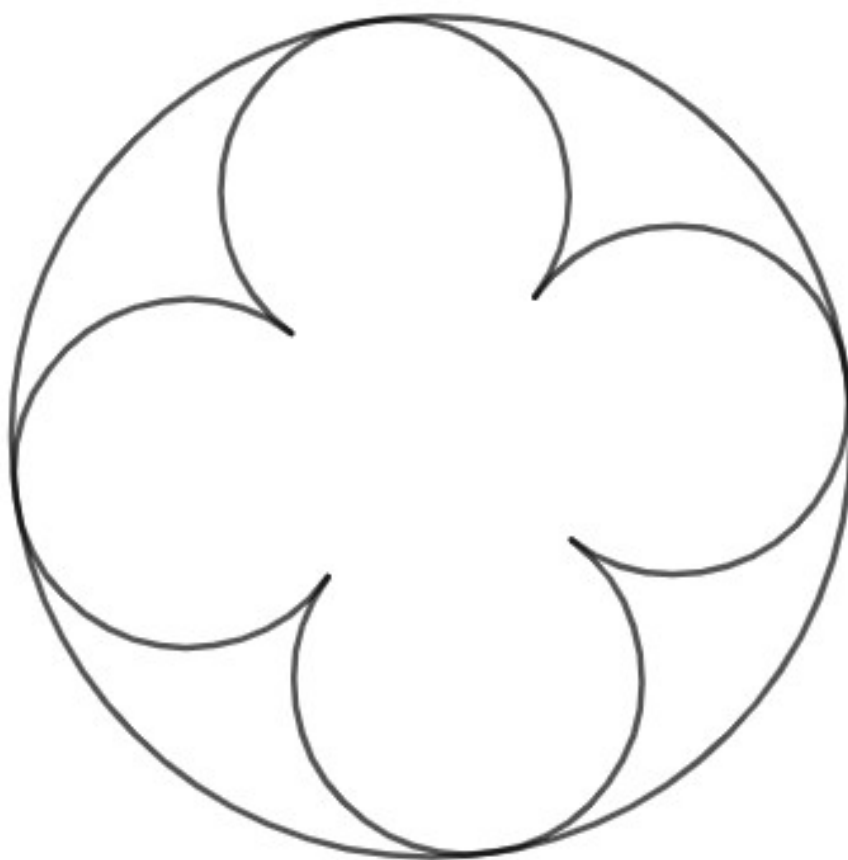
29. Zaznaczamy punkty styczne między okręgami jako punkty: S, V, U i T



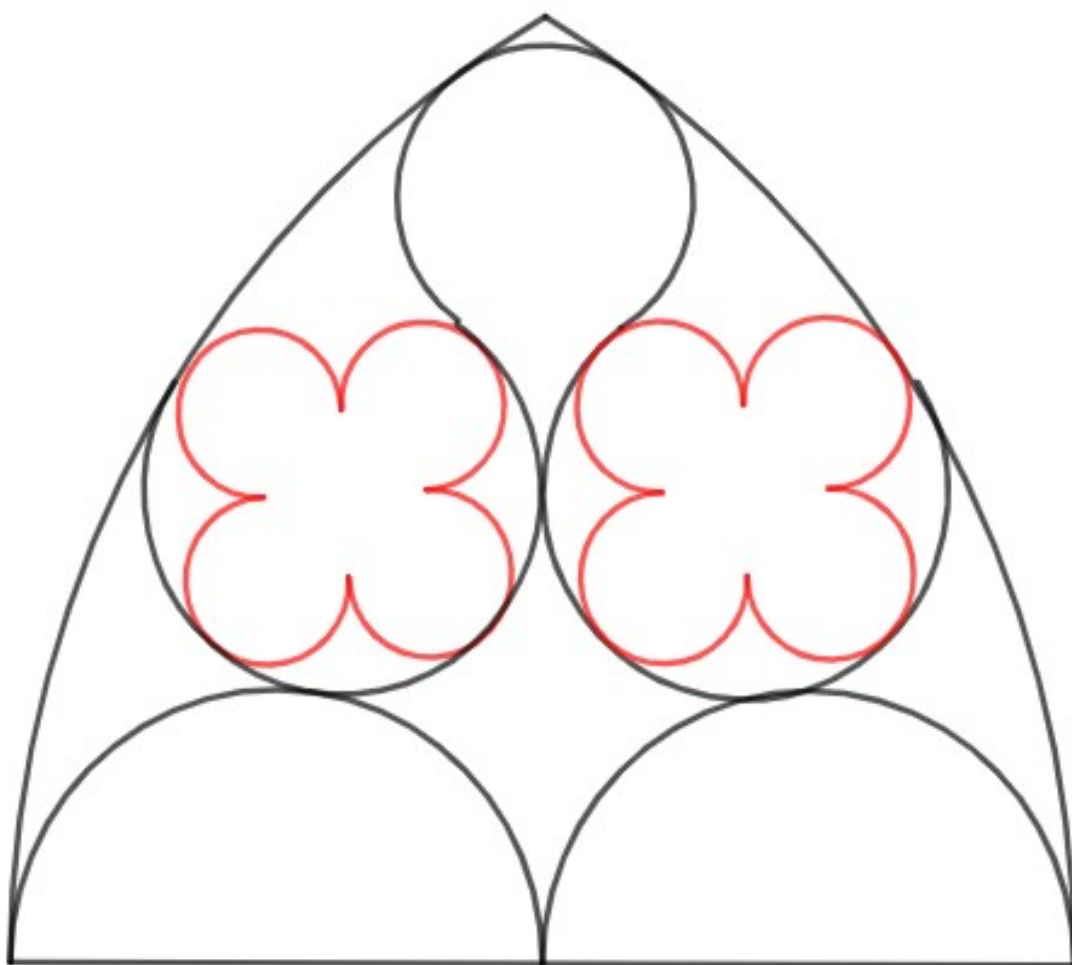
30. Wymazujemy łuki: SV, VU, UT i TS



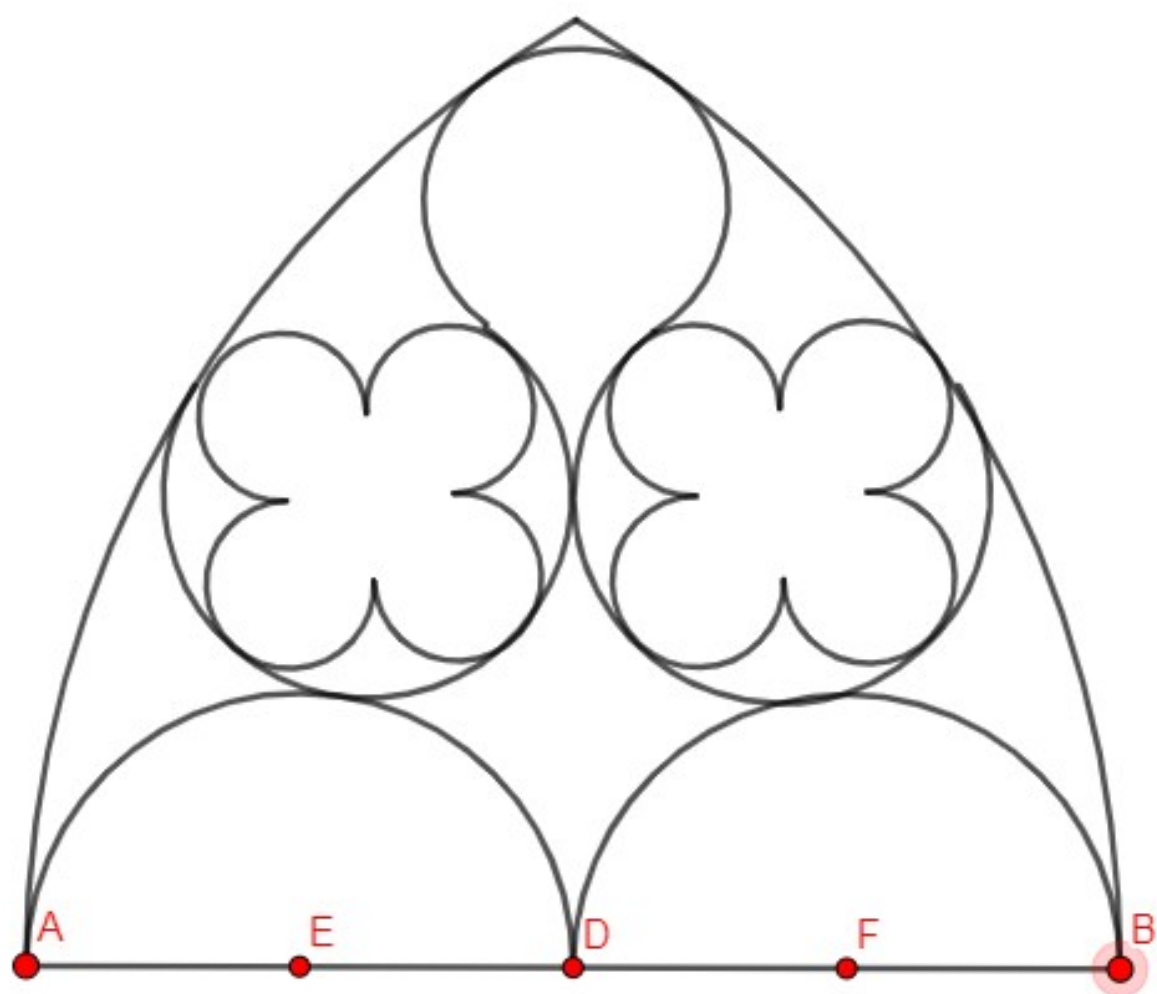
31. Wymazujemy wszystkie punkty



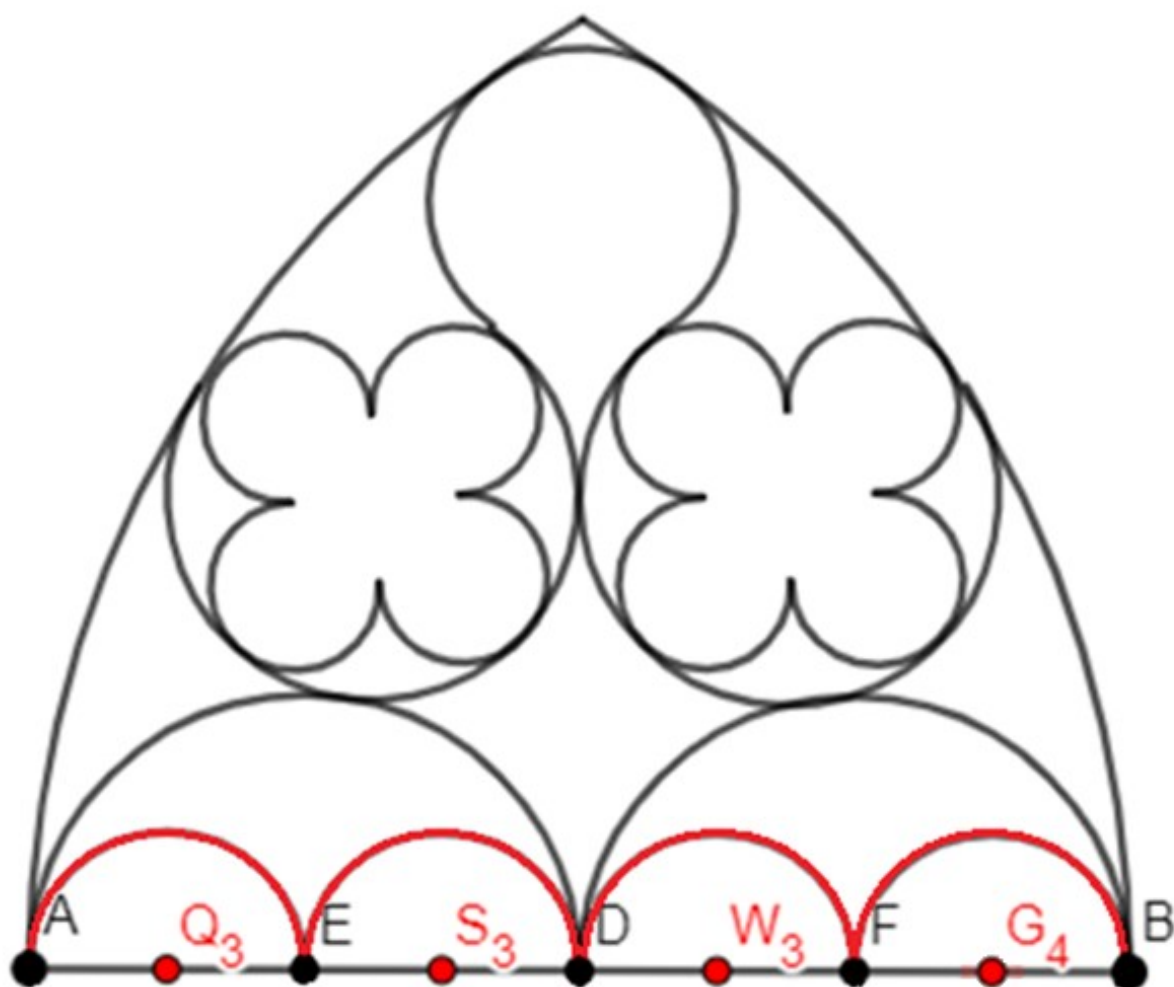
32. Wpisujemy oba „koniczynę” w okno



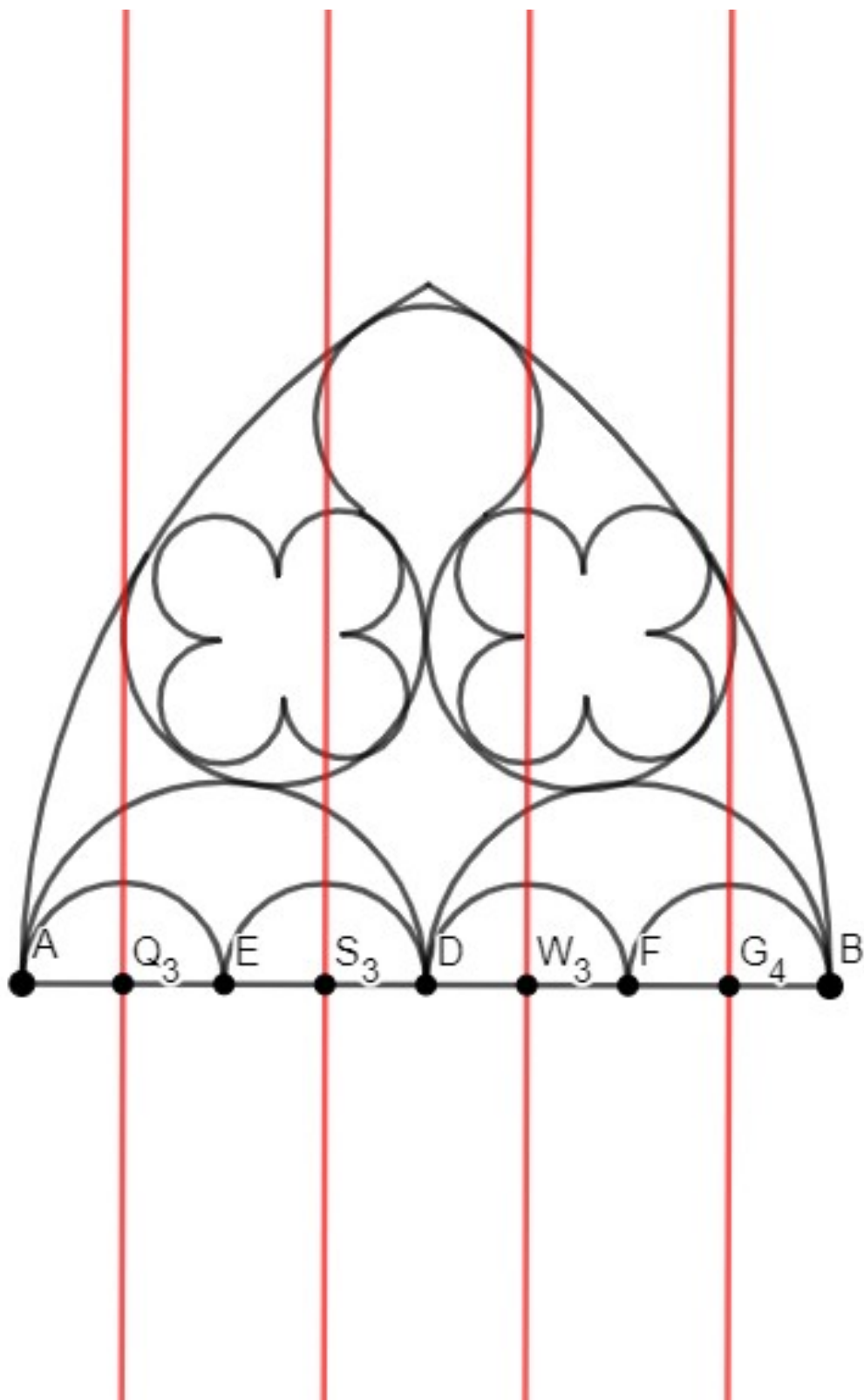
33. Zaznaczamy już wcześniej wyznaczone punkty A, E, D, F i B



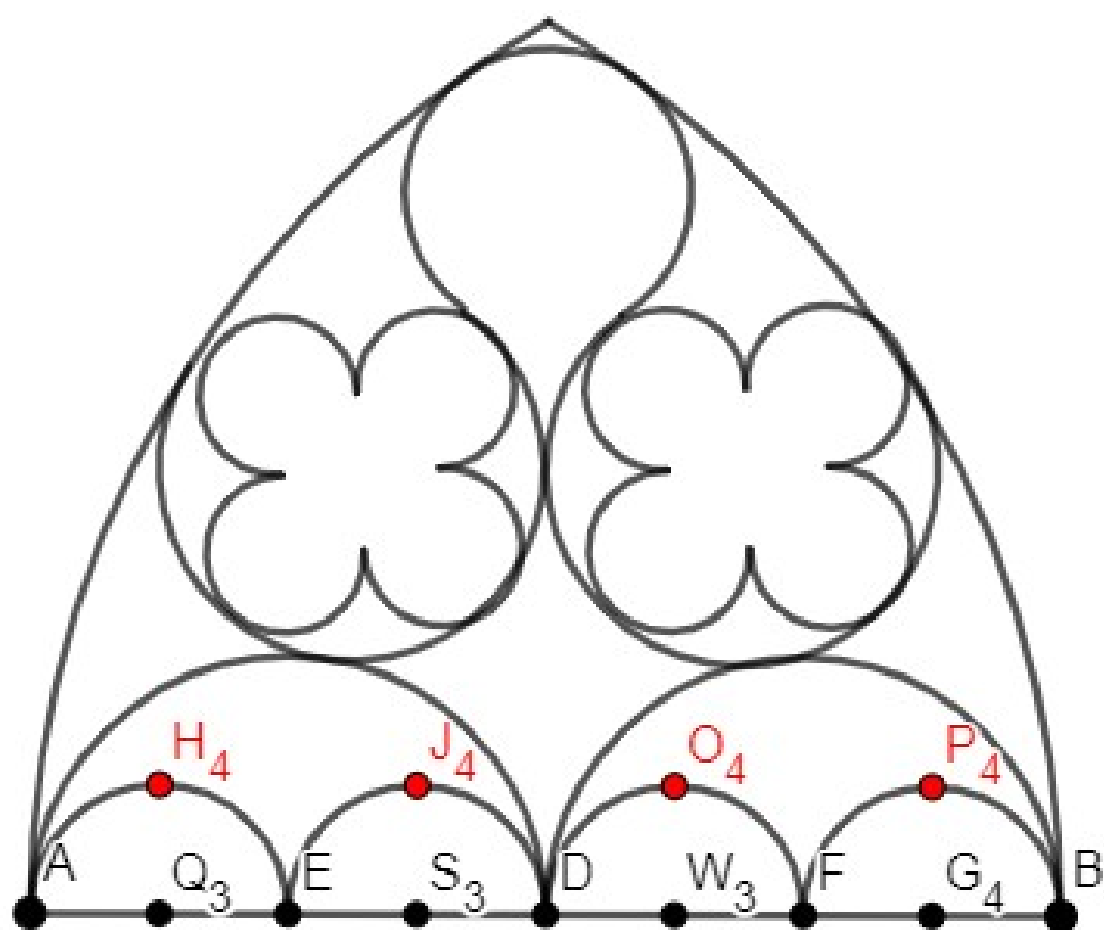
34. Wyznaczamy punkty Q_3 , S_3 , W_3 i G_4 jako kolejne środki odcinków AE , ED , DF i FB oraz prowadzimy kolejno półokręgi o środkach Q_3 , S_3 , W_3 , G_4 i promieniach AQ_3 , ES_3 , DW_3 , FG_4



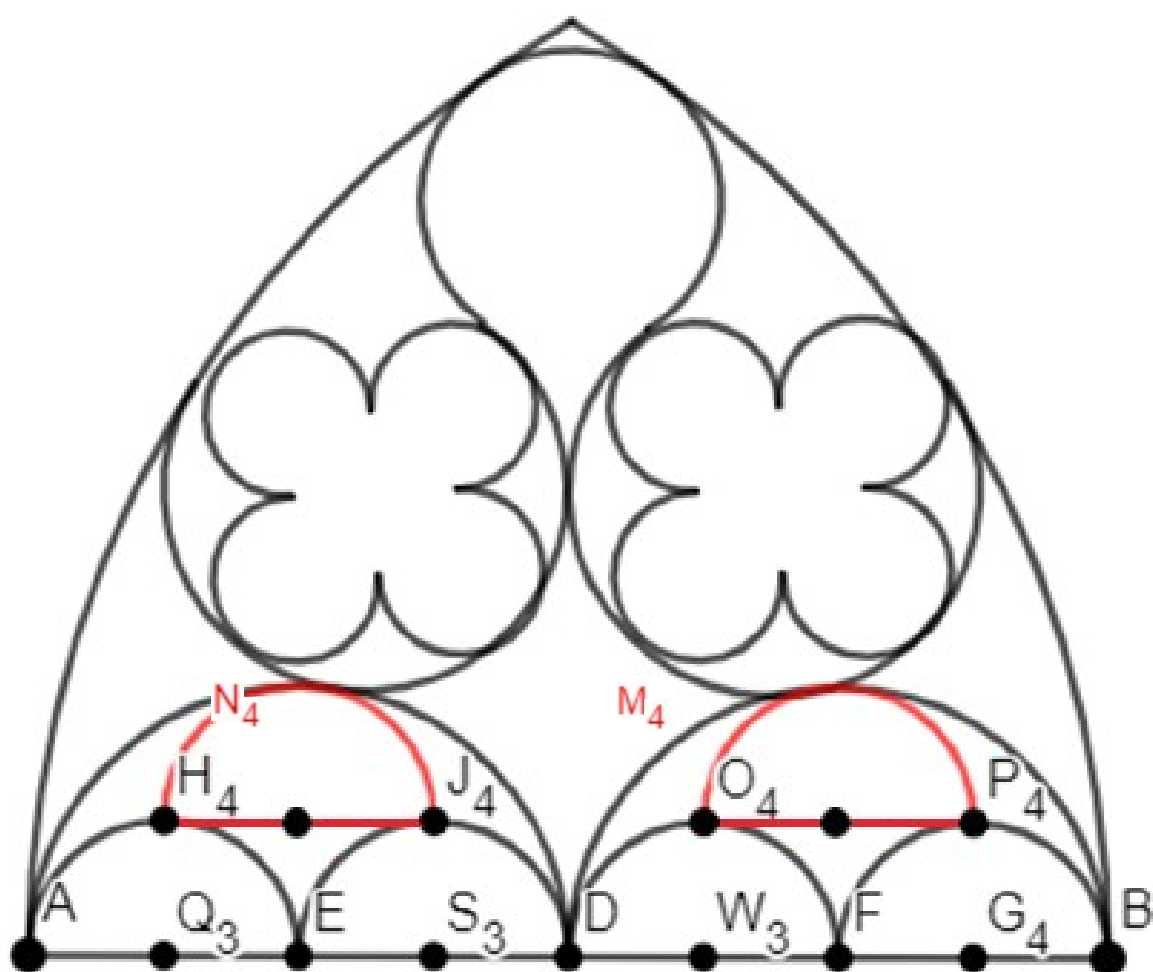
35. Rysujemy proste prostopadłe do odcinka AB przechodzące przez punkty Q_3, S_3, W_3 i G_4



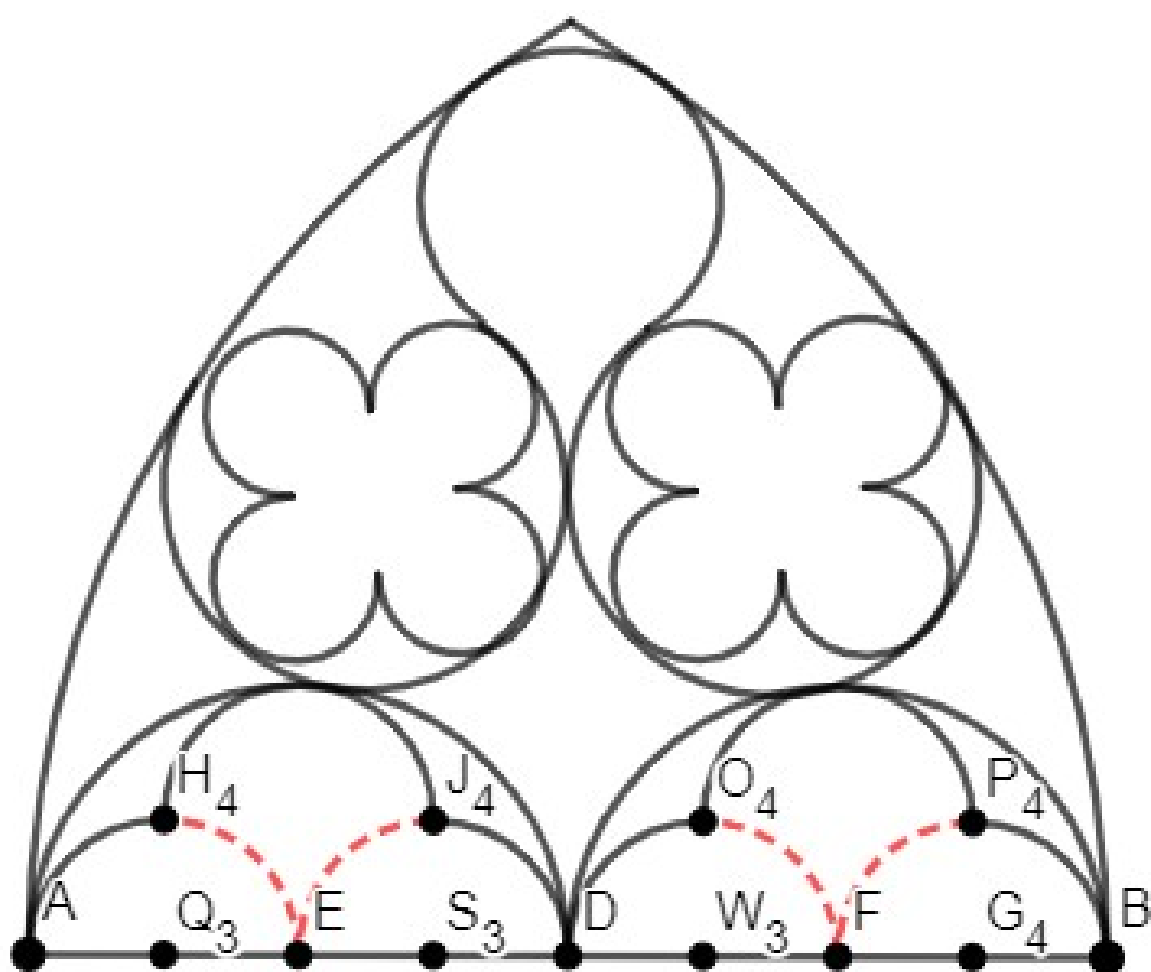
36. W punktach przecięcia prostopadłych i wcześniej narysowanych półokręgów zaznaczamy punkty H_4, J_4, O_4 i P_4



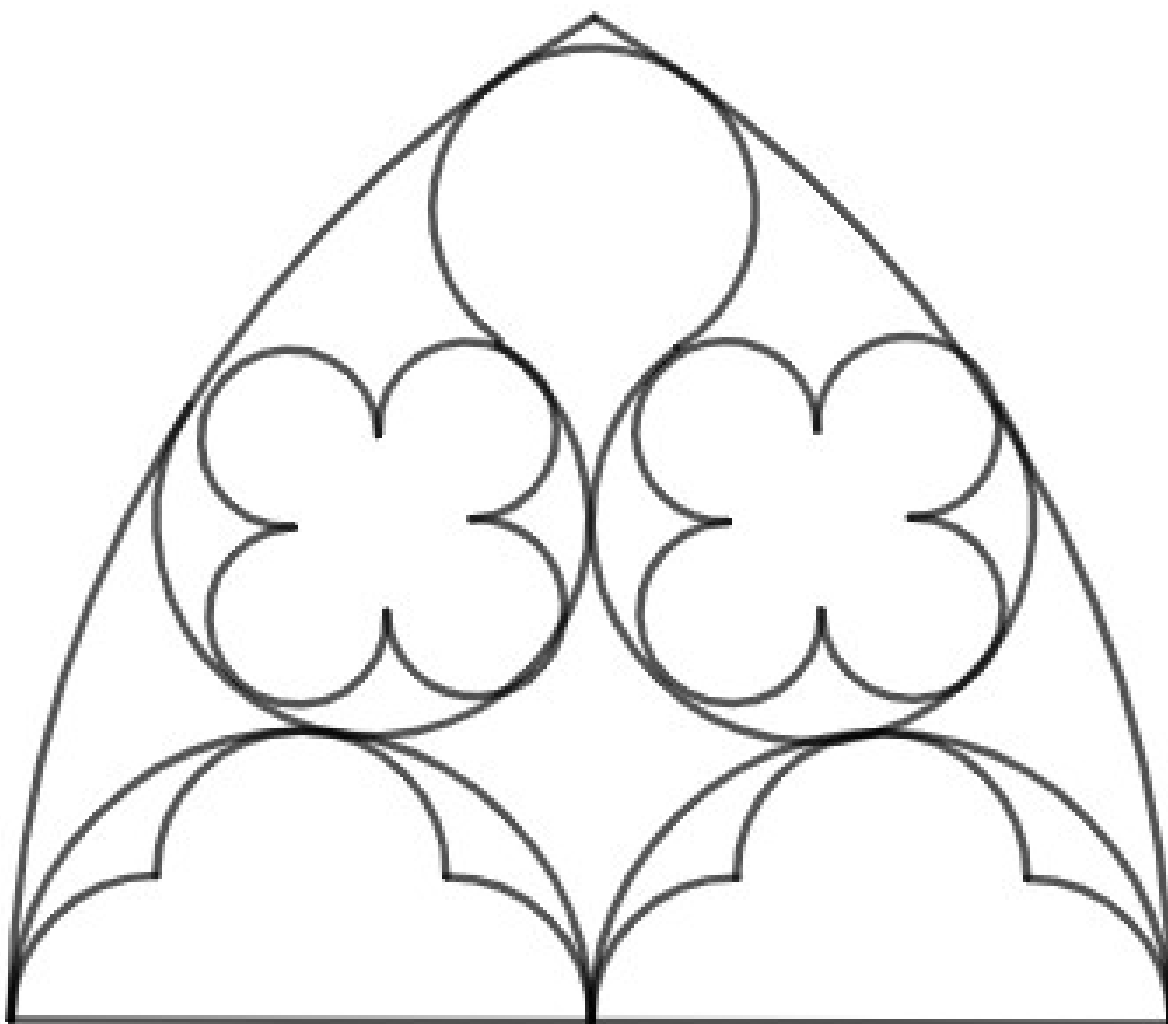
37. Prowadzimy odcinki H_4J_4 i O_4P_4 oraz wyznaczamy ich środki N_4 i M_4
 Następnie rysujemy półokręgi o N_4 i M_4 oraz promieniach H_4N_4 i O_4M_4



38. Wymazujemy łuki o środkach Q_3 , S_3 , W_3 i G_4 oraz promieniach kolejno Q_3E , S_3D , W_3F i G_4B



39. Otrzymujemy nasze okno



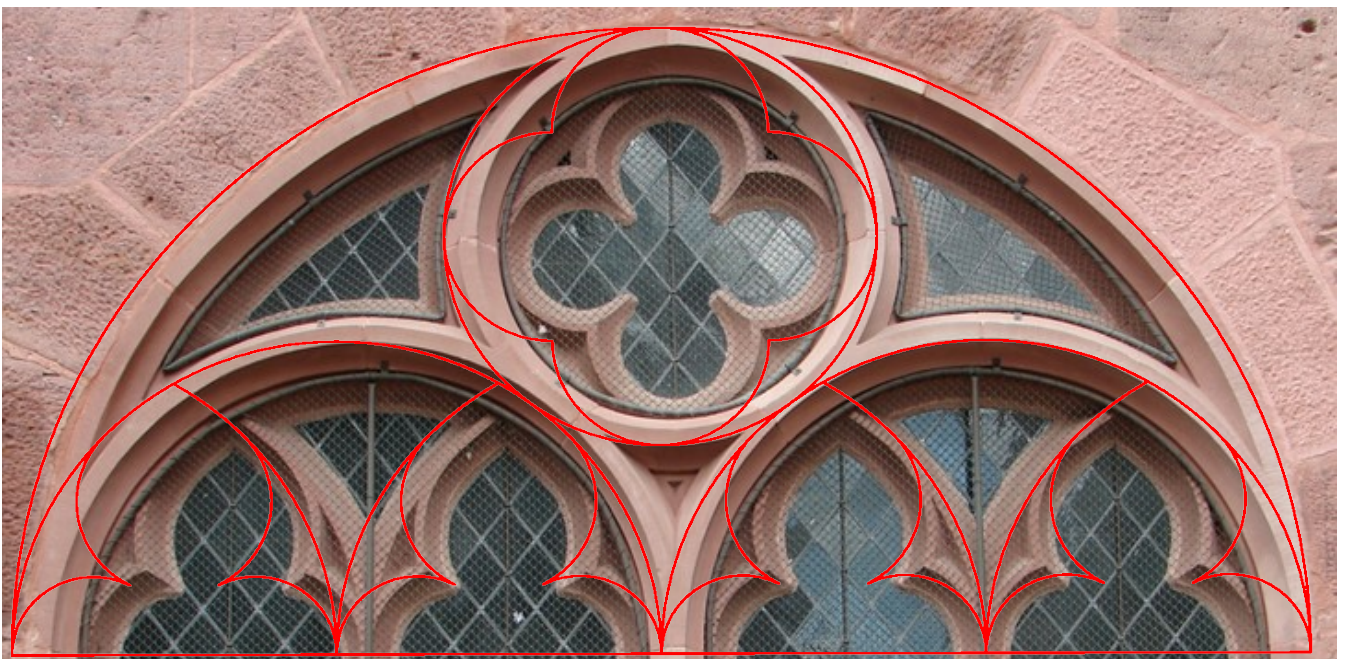
„MATEMATYKA W SZTUCE GOTYKU”

Okno gotyckie dwoma sposobami w 8 krokach



Kościół św. Jerzego we francuskim mieście Sélestat, jeden z najwyższych w całej Alzacji (60m). Był on budowany od XIII do XV wieku przez trzech architektów- Jana Obrechta, Matthisa i Erharta Kindelina.

Większość witraży i okien kościoła są dziełem François Chapuisa.





Mateusz Jemielity, Maciej Kupis, Michał Smółko

SPOSÓB KONSTRUKCYJNY:

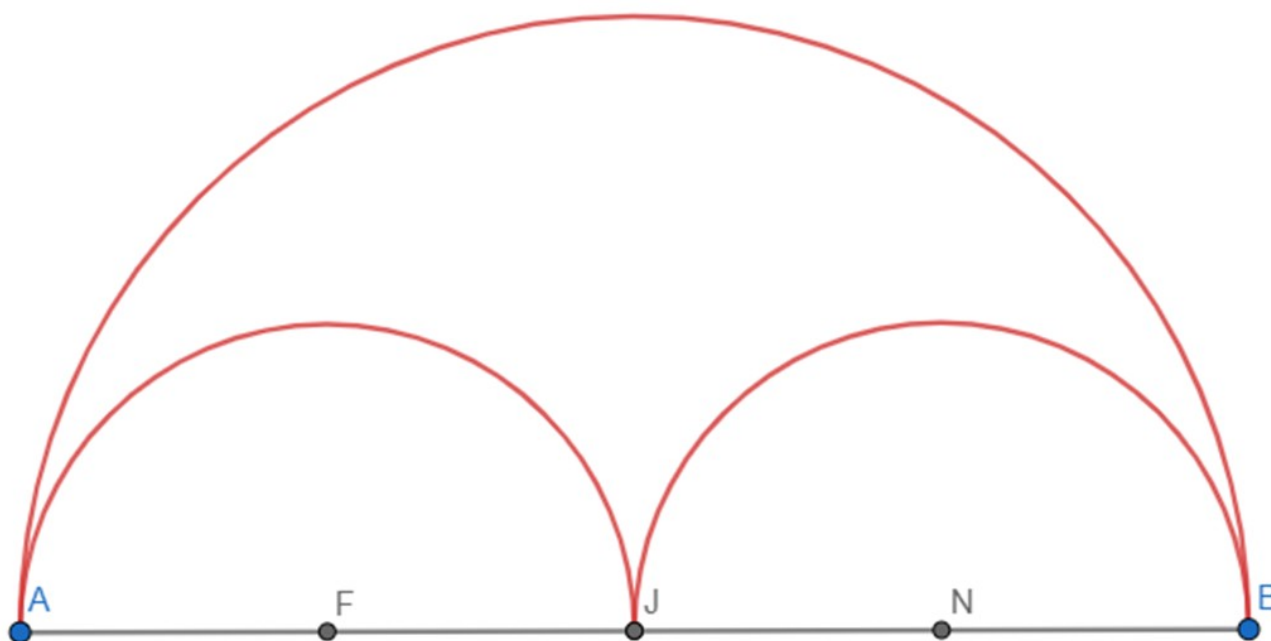
KROK 1:

Wyznaczamy na narysowanej prostej k odcinek AB i dzielimy go na 16 równych odcinków, biorąc środki każdego powstałych odcinków, aż powstaną: AC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IJ, JK, KL, LM, MN, NO, OP, PR, RB.



KROK 2:

Rysujemy półokręgi AB o środku w punkcie J i promieniu AJ, AJ o środku F i promieniu AF oraz JB o środku N i promieniu NB.

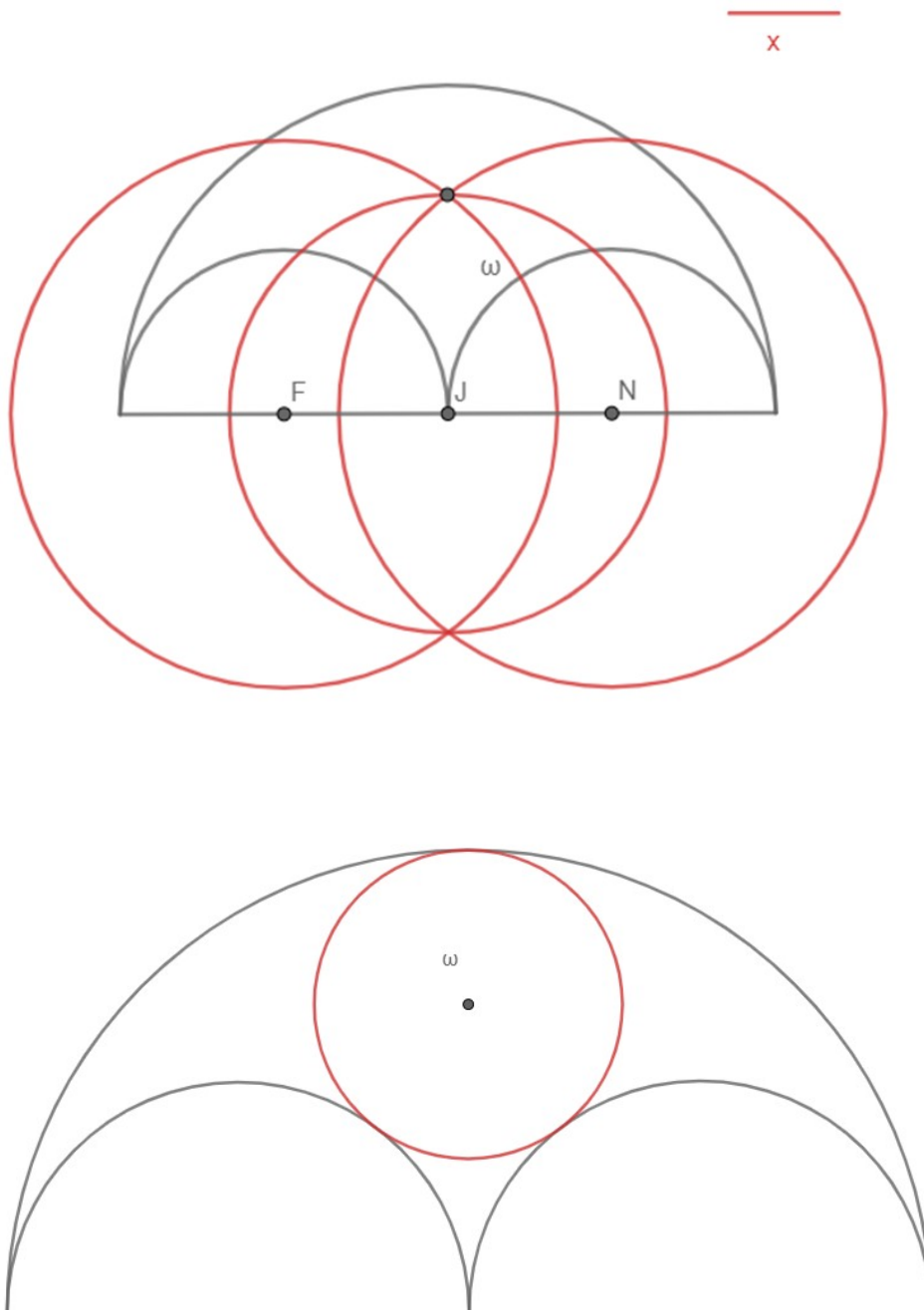


KROK 3:

Rysujemy okrąg ω styczny zewnętrznie do półokręgów AJ i JB i wewnętrznie do AB .
Konstruujemy go rysując 3 okręgi:

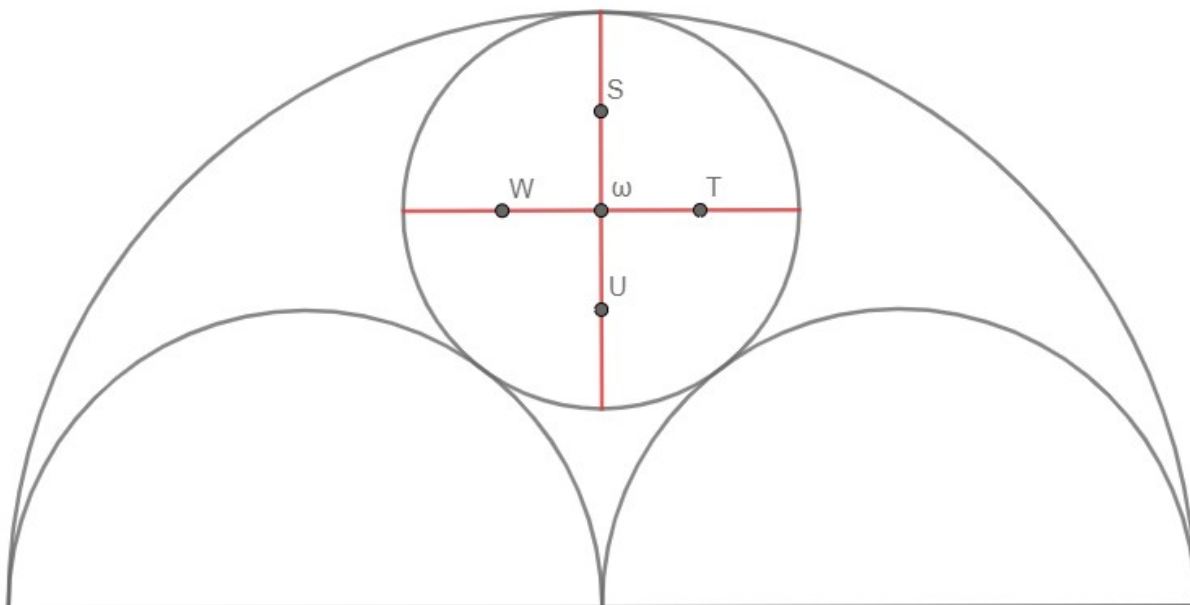
1. O środku F i promieniu $AF + x$
2. O środku N i promieniu $NB + x$
3. O środku J i promieniu $AJ - x$

Modulując długością x możemy przeciąć wszystkie 3 okręgi w jednym punkcie. Punkt przecięcia jest środkiem okręgu ω i promieniu x .



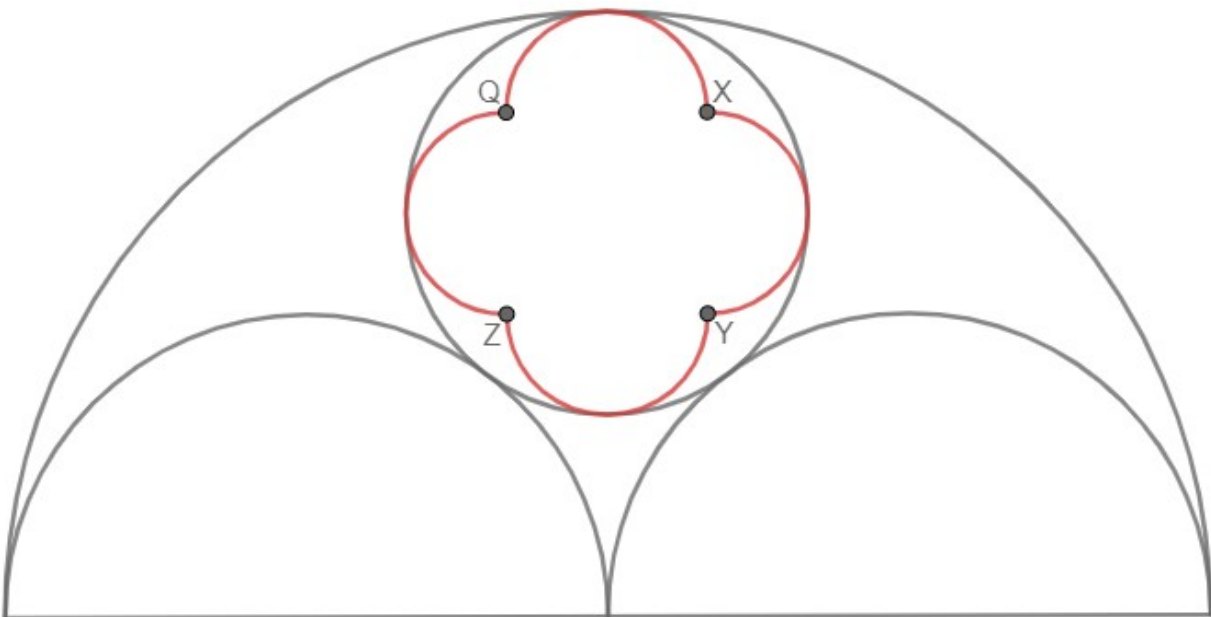
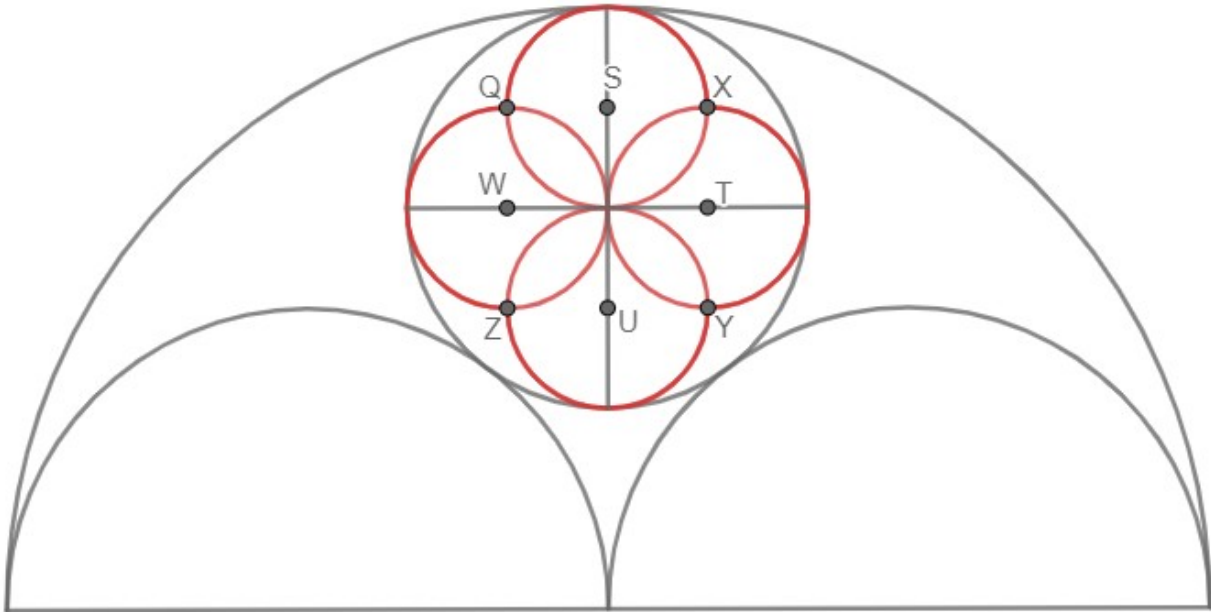
KROK 4:

W okręgu ω rysujemy dwie średnice: jedną prostopadłą, a drugą równoległą do AB. Dzielimy każdą z nich na 4 równe części, otrzymane środki promieni oznaczamy punktami S, T, U, W.



KROK 5:

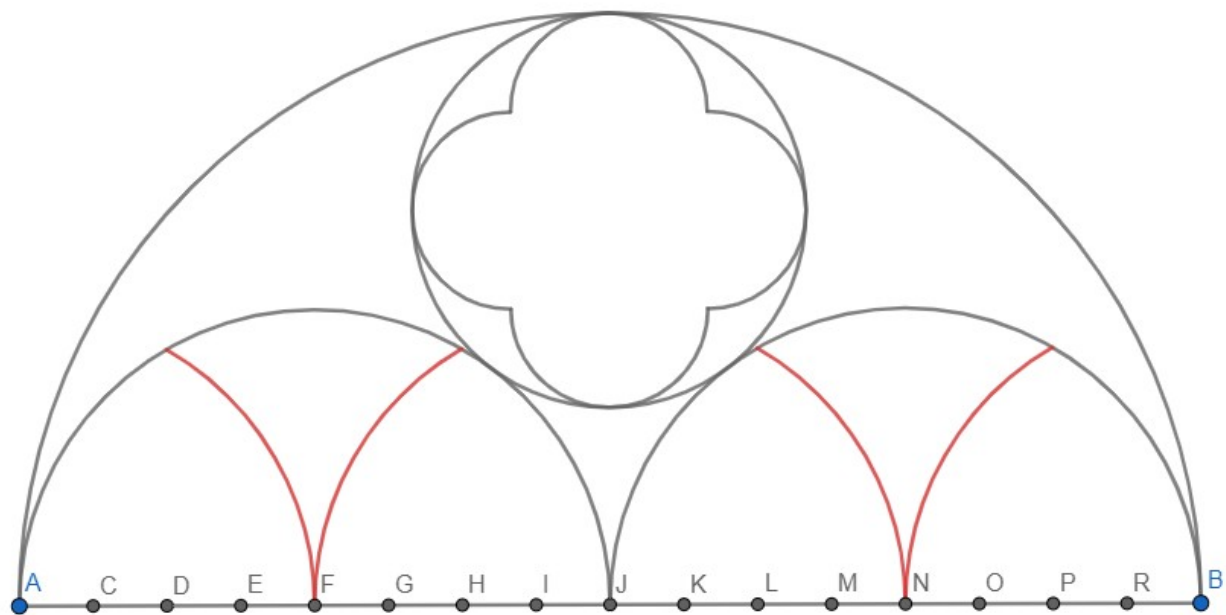
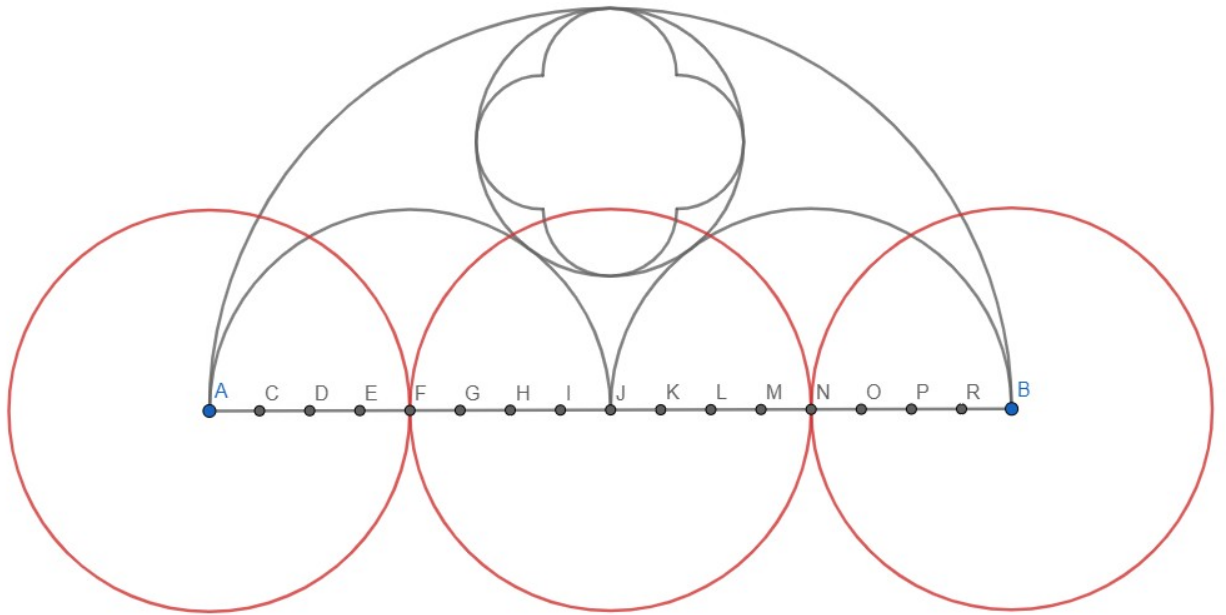
Rysujemy cztery mniejsze okręgi o promieniu równym połowie promienia okręgu ω , o środkach w punktach S, U i T, W. Oznaczamy punkty przecięcia sąsiednich okręgów, te różne od środka ω , przez X, Y, Z, Q. Usuwamy niepotrzebne linie, po wymazaniu powstaje wieloliść.



KROK 6:

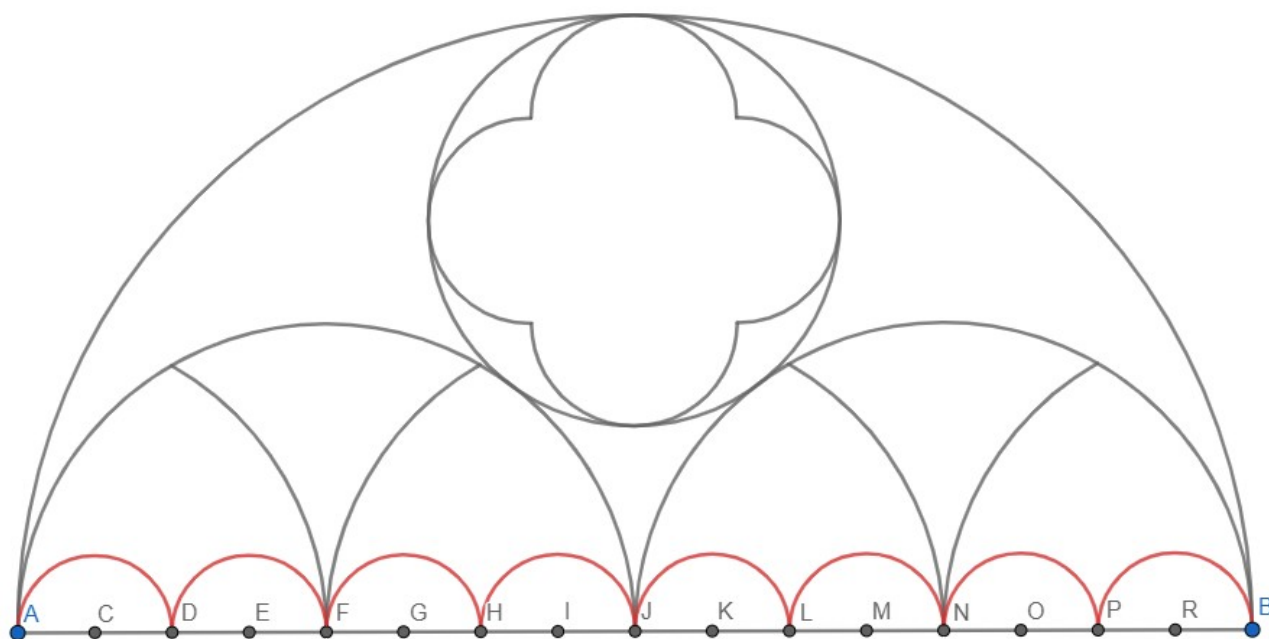
Rysujemy okręgi o promieniach AF i środku A, FJ i środku J, JN i środku J i NB i środku B.

Wymazujemy części okręgów leżących poza półokręgami AJ i BJ.



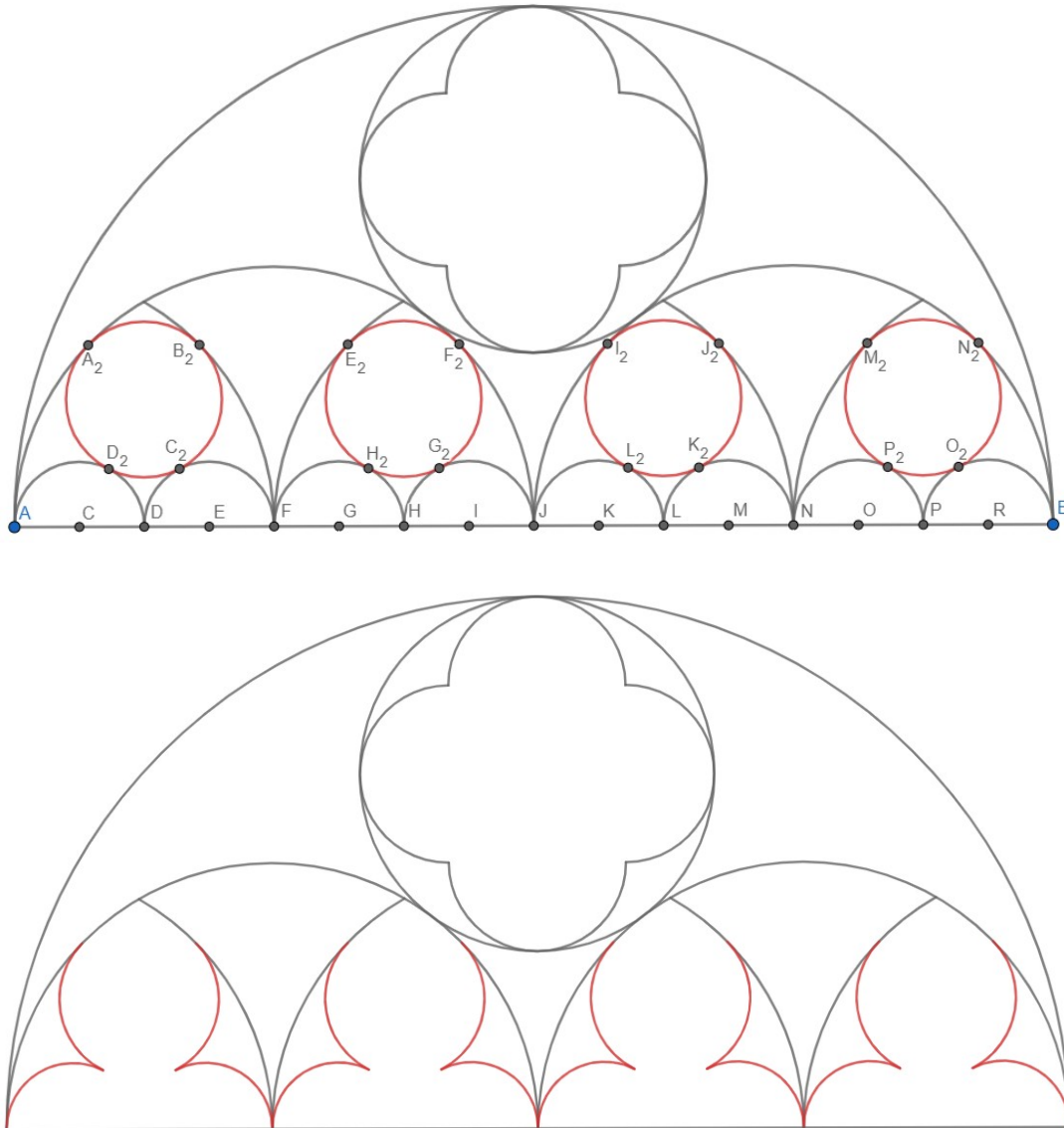
KROK 7:

Rysujemy półokręgi o promieniach AC i środkach C, E, G, I, K, M, O, R styczne do ostrołuków i pozostałych okręgów zewnętrznie.

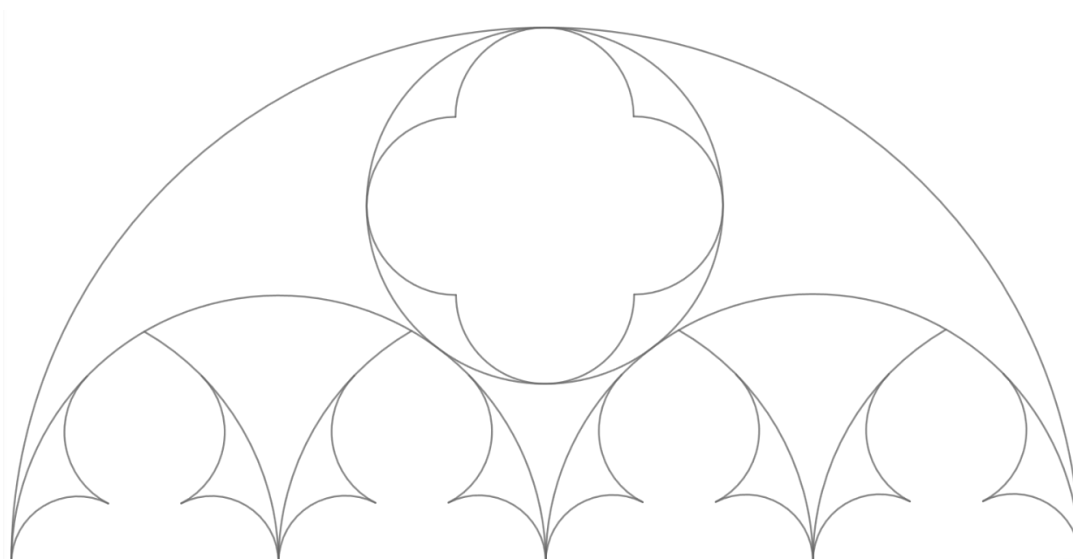


KROK 8:

Wpisujemy okręgi w powstałe ostrołuki, tak że są styczne zewnętrznie do mniejszych półokręgów i wewnętrznie do ostrołuków. Punkty styczności oznaczamy i usuwamy niepotrzebne fragmenty.

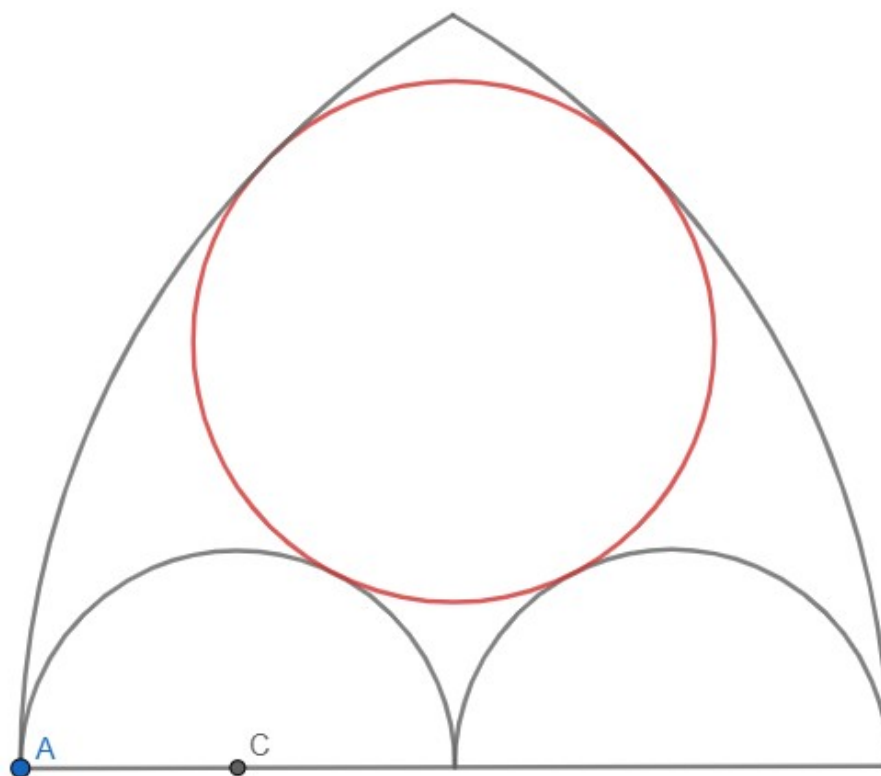
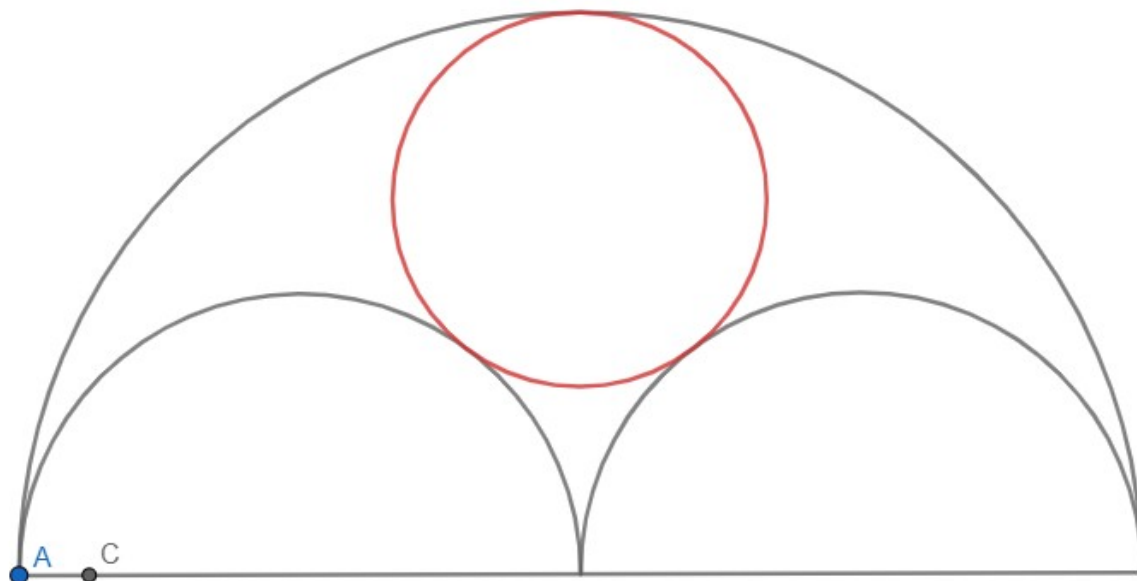


A oto efekt końcowy okna



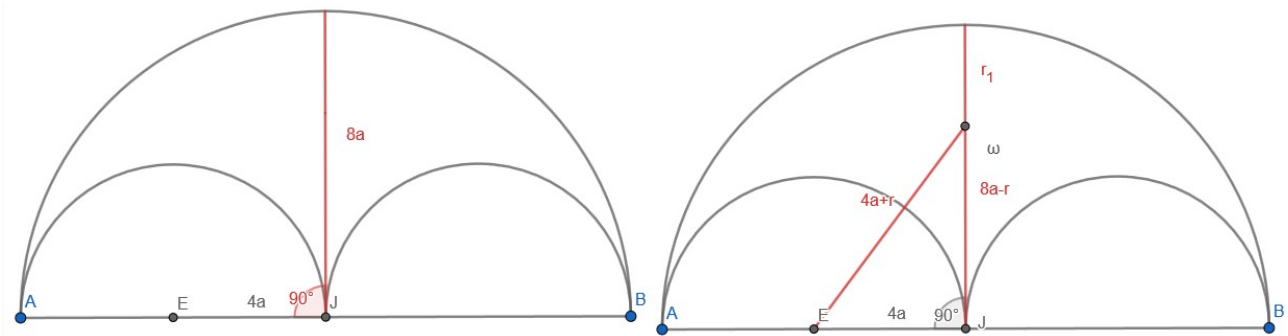
SPOSÓB OBLICZENIOWY:

W tym sposobie – metodzie algebraicznej – liczymy promienie okręgów stycznych występujących w naszym oknie w zależności od najkrótszego odcinka w oknie - AC.



KROK 1:

W tym kroku chcemy znaleźć za pomocą obliczeń, gdzie leży środek okręgu ω , który jest styczny do półokręgów mniejszych zewnętrznie, a większego wewnątrz. Żeby okrąg był styczny, to musi być oddalony od tych półokręgów o swój promień, co oznacza, że musi leżeć na symetralnej odcinka AB.



a – długość odcinka AC, czyli $AB=16a$

r - promień okręgu ω , który chcemy otrzymać.

Ponieważ środki okręgów i punkt styczności leżą na jednej prostej, to odcinek $E\omega$ jest równy ich promieniom, czyli $4a+r$, $EJ = 4a$, $J\omega = 8a-r$

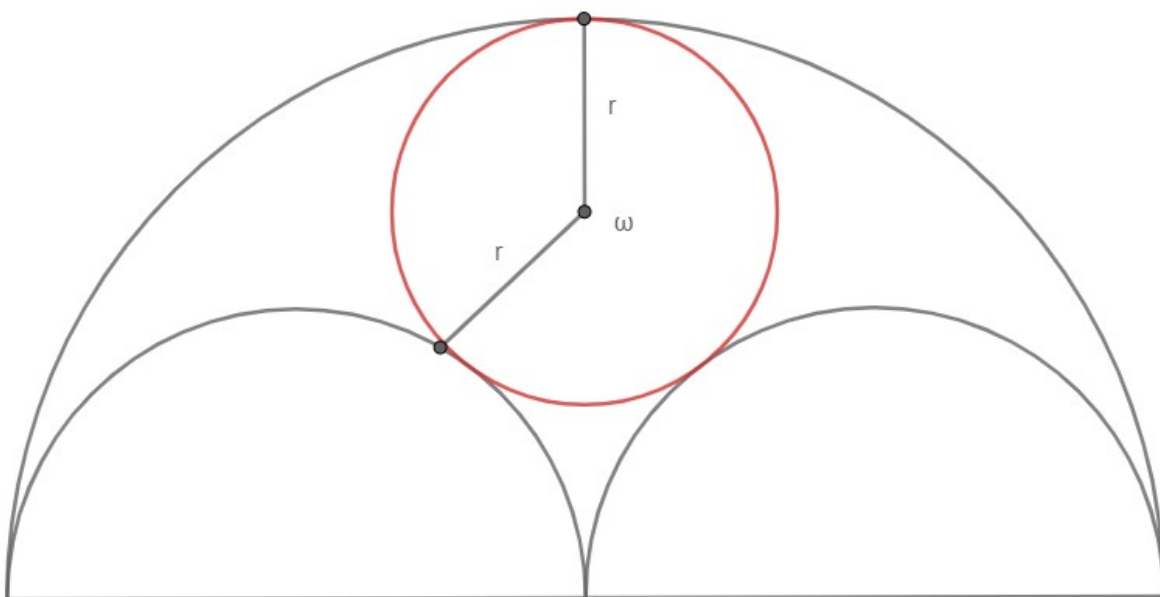
Korzystając z twierdzenia Pitagorasa możemy z tego trójkąta obliczyć, że:

$$(4a)^2 + (8a-r)^2 = (4a+r)^2$$

$$16a^2 + 64a^2 - 16ar + r^2 = 16a^2 + 8ar + r^2$$

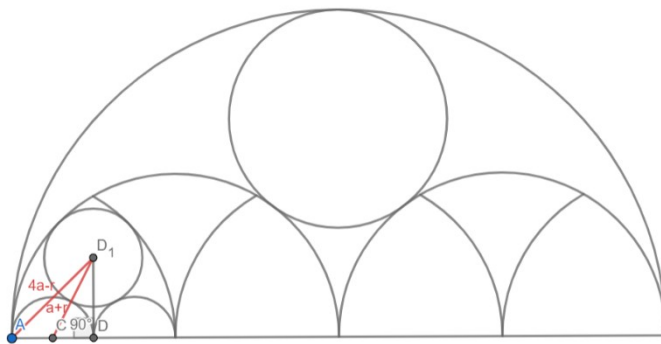
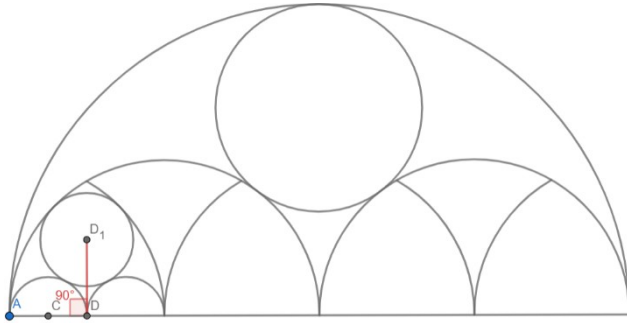
$$48a^2 = 24ar$$

$$r = 2a$$



KROK 2:

Żeby obliczyć promień okręgu wpisanego w ostrołuk AF, zastosujemy podobną metodę, co w poprzednim korku. Środek ponownie musi leżeć na symetralnej, tyle że odcinka AF. Korzystamy również z tego, że środki okręgów i punkt styczności leżą na jednej prostej i rysujemy odcinek AD_1 . Powstają dwa trójkąty prostokątne, z których wyliczamy promień r :



r – promień szukanego okręgu

$$a^2 + 2ar + r^2 = 2ar + r^2$$

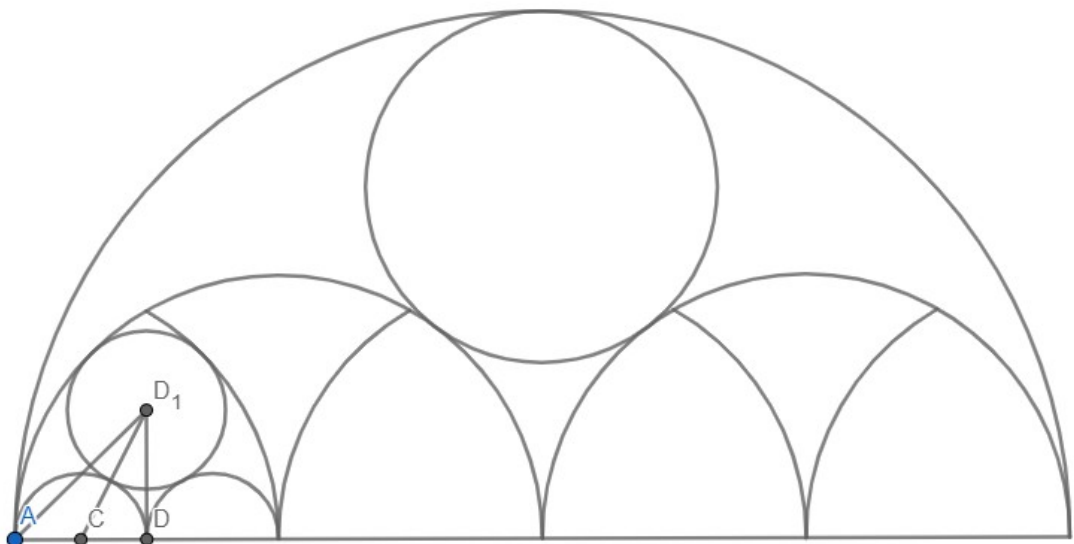
$$16a^2 - 8ar + r^2 - 4a^2 = 12a^2 - 8ar + r^2$$

$$2ar + r^2 = 12a^2 - 8ar + r^2$$

$$10ar = 12a^2$$

$$10r = 12a$$

$$r = 12/10a$$



Wygląd odwzorowanego okna gotyckiego.
Dziękujemy za uwagę i zachęcamy również
do odnajdywania ich.

